

# 算数教育における基礎・基本を重視した指導法の研究

鳴門教育大学大学院 教科・領域教育専攻 自然系コース (数学)  
津野町立中央小学校 教諭 山中 幸蔵

## 1 はじめに

全国学力・学習状況調査から、乗法・除法の数量関係に課題があると考えられる。平成 19 年度の小学校算数 A「小数の乗法の意味」を問う問題では、正答率が 54.3%と低く、問題場面から数量関係をとらえ、乗法、除法の演算を判断し、立式することに課題があると考えられる。また、平成 22 年度の小学校算数 A「除法の意味」を問う問題では、正答率が 54.1%と低く、問題場面の数量関係から除法の場面をとらえ被除数と除数を判断し、立式することに課題があると考えられる。このとき正答は「小さい数÷大きい数」とするものである。このとき誤答で「大きい数÷小さい数」としたものが、31.1%と最も高い。このことから数量関係を把握するときに、児童にとって数量の大小が影響を与えていると考えられる。これらの原因の 1 つとして、「単位量あたりの大きさ」をつかめていないことが考えられる。筆者も「単位量あたりの大きさ」の指導で、効果的な指導法が見当たらず、その指導に困難を感じていた一人である。現行の算数科の教科書では、2 本の数直線の図から、立式を考えることを行ってきたが、よりよい理解へとつなげられない状況が続いてきた。そこで「単位量あたりの大きさ」の単元において、正しい演算決定に導く指導法があれば、児童が乗法・除法の数量関係を把握することへの困難さも改善するのではないかと考えたことが研究を始めたきっかけである。

## 2 研究の目的

本研究では、学力調査で課題のみられた乗法・除法についての立式に関する児童の実態調査を行い、分析を通して立式の困難さの原因を明らかにする。そして、課題を解決するために、児童が乗法・除法の数量関係を把握できる効果的な指導法を開発するとともに、小数の乗法・除法の数量関係に関する理解と分数の乗法・除法の数量関係に関する理解の関係について分析を行い、指導法の効果を明らかにし、教育実践への提言をすることを目的とする。

## 3 先行研究

### (1) 乗法と除法の意味

石川・林 (1991) は乗法と除法について、単位量あたりの考えと割合の考えから意味づけを行っている。乗法の見解についてまとめたものを、次の表 1 に示す。

表 1 乗法の見解

①4 kmの3倍： (4 km) × 3 = 12 km	①は累加算であり、同一種類の量の中でのかけ算の特別な場合である。
②速さ 4 km/h で 3 時間歩く距離： (4 km/h) × (3h) = 12 km	②は物理量体系の中でのかけ算である。

表 1 の石川と林の見解から、①は、割合の考えととらえることができる。あるものの(基準量 4km)の何倍(割合)にあたる量(比較量 12km)を求めることができる。これは比の第二用法の考えである。また②は、単位量あたりの考えととらえることができる。1 単位あたりの量(4km/h)が決まっているとき、単位量に対する単位のべ量(3h)から全体量(12km)を求める考え方である。

次に除法の見解についてまとめたものを、表 2 に示す。

表 2 除法の見解

①20 cmの羊糞を 5 cmずつに分ける： (20 cm) ÷ (5 cm/本) = 4 (本)	①は 20 cmの中に 5 cmが何回含まれるかという場合で考える。いわゆる、包含除である。
②20 cmの距離を 5 秒間で動いた： (20 cm) ÷ (5sec) = 4 cm/sec	②は、単位量当たりの量を求める場合で考えるわり算で、いわゆる等分除である。この種のわり算は量体系の中でのわり算である。速さの定義は、速さ = 距離 ÷ 時間となるので、速さは、異種の量の商 (単位量あたりの量) となる。

表 2 の除法の見解から、①と②はともに単位量あたりの考えである。単位量あたりの考え以外に、除法は、割合の考えからとらえることができるとしている。1 つ目は、比の第一用法の考え方である。何倍 (割合) にあたる量 (比較量) が、あるものの量 (基準量) の何倍 (割合) かを求める場合である。2 つ目は、比の第三用法の考え方である。何倍 (割合) にあたる量 (比較量) から、1 倍にあたるものの量 (基準量) を求める場合である。

また、Schwartz (1988) は、I : 行程における平均の速さ (マイル/時間)、E : 行程にかかる時間 (時間)、E' : 移動距離 (マイル) とすると、表 3 に示すように、3 つの量に関連付ける 1 つの乗法操作と 3 つの量に関連付ける 2 つの除法操作が存在すると述べている。

表 3 乗法・除法の数量関係

① $I \times E = E'$	指示対象の「マイル/時間」に関する量 I と指示対象の「時間」に関する量 E の積は、その指示対象が、マイル/時間または時間のどちらでもない量 E' を生じさせる。
② $E' / E = I$	指示対象の「マイル」に関する量 E' と指示対象の「時間」に関する量 E の商は、その指示対象が、マイルまたは時間のどちらでもない量 I を生じさせる。また②においては、1 つの量を平等に分配したり、分割したりする心像は、有効に働かない。
③ $E' / I = E$	指示対象の「マイル」に関する量 E' と指示対象の「マイル/時間」に関する量 I の商は、その指示対象が、マイルまたはマイル/時間のどちらでもない量 E を生じさせる。また③においては、分割の解釈を挟む余地がない。

## (2) 乗法・除法の立式への困難性

Fischbein 他 3 名 (1985) は、乗法・除法に関する文章題を解決することにおいて、児童は暗黙のモデルの影響を受け、数量関係を式に表すことに困難を示すことを述べている。暗黙のモデルは、乗法における「大きい方の数量 × 小さい方の数量」のモデルと除法における「大きい方の数量 ÷ 小さい方の数量」のモデルを指す。これらのモデルに基づいた解答方略を以後、「大小方略」と示す。

## (3) 乗法・除法の数量関係の定義

乗法、除法の意味について平成 20 年の学習指導要領解説・算数編では、乗法の意味を、『B を「基準にする大きさ」、P を「割合」、A を「割合に当たる大きさ」とするとき、 $B \times P = A$  と表せる』である。除法の意味は、「乗法の逆として割合を求める場合と、基準にする大きさを求める場合とがある」としている。また、乗法・除法の数量関係には、割合と単位量あたりの大きさの場面が考えられる。単位量あたりの大きさは、3 量すべて異なる単位の関係であるが、割合は 3 量のうち 1 つは単位を持たない無名数であり、2 量を結び付ける乗法的なオペレーターとしての存在である。算数

科の指導において、割合と単位量あたりの大きさを計算の操作に重点を置いて指導した場合、乗法・除法は同じ構造を持つ関係であるが、その数量関係のもつ意味は異なっている。したがって、乗法・除法における割合の考えと単位量あたりの考えを統合性という特性でくくる場合、立式において、異種と同種という場面の違いを適切に児童にとらえさせることが重要であると考えられる。

これらの先行研究をもとに乗法・除法における数量関係を次のように定義する。

乗法・除法における数量関係とは、「乗法・除法を用いて異種あるいは同種の 2 つの数量からもう 1 つの数量を作り出すことにおける 3 つの数量の結びつき」のことである。

#### (4) 単位量あたりの量

乗法・除法における数量関係の定義をもとに、単位量あたりの大きさにおける 3 つの数量の結びつきを関係図とその用語に示す。今後、この単位量あたりの大きさを、本研究の数量関係の定義に基づき、以後、単位量あたりの量と表記する。単位量あたりの量の関係図における用語を表 4 に示す。また、単位量あたりの量の関係図を図 1 に示す。

表 4 単位量あたりの量の関係図における用語

単位量あたりの量	異種の 2 量が比例関係にあることを前提とする。このとき、一方の数量が 1 あたりするとき、もう一方の数量を除法により結び付けた 1 つの量。
単位量	単位量あたりの量を表す時に、1m や 1k g のように基準となる量。
単位量に対する他方の量	単位量に対して、除法により被除数として結び付けられた異種の量である。異種であるため単位量に対して、加法性はない。
基準とする一方の量	単位量に対する同種の量である。
一方の量に対する他方の量	基準とする一方の量に対して異種の量であり、単位量あたりの量と同様に比例の関係にある。単位量に対する他方の量とは、同種の量である。

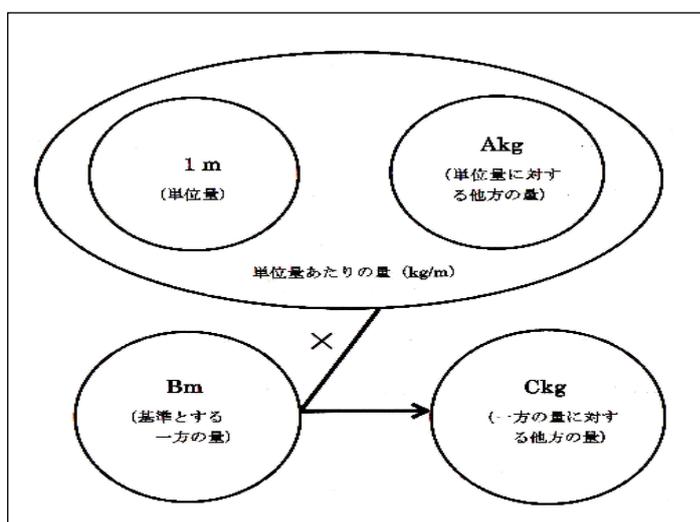


図 1 単位量あたりの量 関係図

### 4 乗法・除法における数量関係についての児童の実態

#### (1) 調査の概要

乗法・除法の数量関係における立式に関する児童の困難さの原因を明らかにするために、既に小数、分数の乗法・除法を学習している兵庫県神戸市 K 小学校、第 6 学年の児童 147 名を対象に実態調査を行う。

(2) 調査問題の形式

調査内容は、単位量あたりの量に関する文章題から、立式のみを問うものである。作成した調査問題に扱う数は、小数と分数に限定する。次に、単位量あたりの量の数量関係を関係付けると、次の3つの形式が考えられる。

- ・一方の量に対する他方の量を求めるもの

「1 mの重さが B k g のロープがあります。このロープ P mの重さは何 k g ですか。」

- ・単位量あたりの量を求めるもの

「ロープ P mの重さは A k g です。このロープ 1 mの重さは、何 k g ですか。」

- ・基準とする一方の量を求めるもの

「1 mの重さが B k g のロープがあります。このロープ A k g の長さは何 m ですか。」

以後、一方の量に対する他方の量を求めるものを乗法、単位量あたりの量を求める除法の形式を除法①、基準とする一方の量を求める除法の形式を除法②と表す。さらに、立式においては、2量の順序の観点から「大きい方の数量×小さい方の数量」、「大きい方の数量÷小さい方の数量」という大小の順序の2つのタイプと、「小さい方の数量×大きい方の数量」、「小さい方の数量÷大きい方の数量」という小大の順序の2つのタイプがあり、計4つのタイプが考えられる。以後、大小の2つのタイプを「大×小」、「大÷小」小大の2つのタイプを「小×大」「小÷大」と表記する。

問題場面は、小数、分数の2つの観点と単位量あたりの量の3つの形式に、2量の順序のタイプを組み合わせると、問題場面は12のタイプが考えられる。

(3) 調査結果

実態調査の結果を問題ごとに正答数の多い順に並び替えて表したものが、表5である。

表5 正答数順の正誤集計表

順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
問題	問題1	問題5	問題7	問題11	問題10	問題12	問題4	問題2	問題8	問題6	問題9	問題3
問題構成	小数 大×小	小数 小×大	分数 大×小	分数 小×大	小数 大÷小 除法①	小数 大÷小 除法②	分数 小÷大 除法①	分数 大÷小 除法①	小数 小÷大 除法①	分数 小÷大 除法②	分数 大÷小 除法②	小数 小 ÷大 除法②
正答	119	107	103	93	91	85	62	58	54	38	32	21
誤答	28	40	44	54	56	62	85	89	93	109	115	126

調査を通じて、小数と分数の乗法・除法の数量関係での立式における児童の実態として次のようなことが明らかになった。

- ・小数、分数ともに、乗法の文章題が除法の文章題より正答数が多い。このことから、児童は、乗法の場面が除法の場面より、数量関係がとらえやすいと考えられる。
- ・児童は、「大÷小(除法①)」「大÷小(除法②)」の場面が分かりやすく、「小÷大(除法①)」「小÷大(除法②)」の場面が難しい。このことから、小数の除法では、大小方略が立式に影響すると考えられる。
- ・児童は、分数の乗法・除法において、除法①の場面が分かりやすく、除法②の場面が難しい。また、乗法、除法①、除法②のそれぞれにおいては、数量の大小における影響は少ないことが考えられる。
- ・小数の乗法・除法と分数の乗法・除法の関連について、小数で正しい演算を判断できない児童は、分数でも数量関係を把握することが難しくなる。

5 乗法・除法における数量関係の把握を重視した指導法の開発

(1) 調査の概要

乗法・除法の数量関係を把握するために、図的表現の1つである関係図を用いた指導法を開発した。そして、小数の乗法・除法は学習しているが、分数の乗法・除法を学習していない高知県津野町T小学校第6学年の児童17名を対象に、関係図を用いた乗法・除法の数量関係の授業を行い、事前、事後において調査を実施し、関係図の効果を探る。授業の計画を以下に示す。

(2) 授業計画

時	学習活動	指導にあたって
第1時	整数の乗法・除法	乗法と除法の文章題を対応する2本の数直線から数量関係をとらえる流れで導入し、その中から数値の関係をとり出し、関係図へと移行する学習活動を展開する。関係図に当てはめた位置関係から、3つの数量を求める式をつかませ、乗法・除法の相互の関係を正確に把握させたいと考える。
第2時	小数の乗法・除法	整数の関係図の構造から類推させて、小数の乗法・除法への適用を考えさせる。このときに関係図は、数量の位置関係に着目することにより、数値の大小を捨象し、大小方略の影響を取り除かせたい。
第3時	分数の乗法・除法	整数や小数の乗法・除法の数量関係を分数に拡張することがねらいである。整数や小数でとらえた関係図の構造を振り返り、そこから類推させる活動を通じて、分数同士でも数量関係は変わらないことをとらえさせる。
第4時	乗法・除法の関係	整数、小数、分数、いずれの乗法・除法の場面でも、数量関係は統合的にとらえられることを関係図の共通した構造から理解させたい。

(3) 関係図を指導する際の留意点

開発した指導法のなかで重要となる関係図(図1)を児童がかくために、必要な7つの手順を考案した。指導者は、その手順に準拠して指導していく。次に、関係図を指導する際の留意点を示す。

ア 単位量

単位量という言葉は、第5学年で学習する「単位量あたりの大きさ」で扱われる。教科書では、単位量について明確に定義されていない。そのため、児童にあまりなじみのある言葉とは考えられない。しかし、単位量は、乗法・除法の数量関係をつかむための重要な言葉であると考えられる。指導にあたっては、文章題、数直線、関係図のなかで、1人や1m、1dLなどの表記を押さえさせながら、丁寧に扱う必要があると考えられる。

イ 単位量あたりの量

単位量あたりの量は、上記の単位量あたりの大きさの「大きさ」という表記を「量」に変更して指導する。乗法・除法の関係図を「量」という表記で統一することによって、「量」の関係で構成されていることをとらえさせる。しかし、単位量あたりの量は、単位量と単位量に対する他方の量に関係付けた新たな量であるため、認識することが難しいと考えられる。単位量あたりの量に気をつけさせるために、文章題に記述されている単位量あたりの量の内容と図的表現(絵、数直線、関係図)を統一した指導により、認識させていく必要があると考えられる。また、関係図に記入する順番としては、最初に単位量あたりの量を記入することから指導する。その際、単位量と単位量に対する他方の量で構成されている量であるため、1つのまとまりの量として記入することを指導する必要があると考えられる。また、このときに他の数量(基準とする一方の量、一方の量に対する他方の量)とつなぐことにより、3つの数量から関係図が構成されていることをとらえさせることが、数量の相互関係をつかんでいく基礎になると考えられる。3つの数量の関係図をかき、そこから数量の相互関係をつかむことが演算決定の根拠につながると考えられる。

ウ 同じ単位の量(なかよしの関係)

単位量あたりの量、基準とする一方の量、一方の量に対する他方の量という3つの数量として

関係をとらえるが、文章題の中には、2種類の単位しかないため、同じ単位の量を区別することは、容易にできると考えられる。また、同じ単位どうしをなかよしの関係として表現することにより、気をつけやすくなると考えられる。しかし、このことを強調しすぎると、単位量あたりの量を切り離して認識する恐れがあるので、配慮が必要であると考えられる。同じ単位の量は、単位量あたりの量の記入の後に、単位量あたりの量となかよしの関係で上下の位置でつながっていることを確認して記入するよう指導する。

#### エ 演算決定

関係図は、一方の量に対する他方の量に向けて矢印が引いてあり、これにより、乗法を基本形としてとらえられるように構成されている。この基本形をもとに、3つの数量のどこを求めているかを判断することによって、乗法と除法が相互に関係していることを認識することが大切であると考えられる。また、関係図では乗法であることは判断できやすいが、除法については、求めなければならない数量に対して、他の2量の関係から被除数と除数を判断しなければならない。この時に、乗法の判断のためにある矢印とは別に、被除数と除数を判断し、大小方略の影響を軽減させるために補助的な矢印を引くことを指導する必要があると考えられる。

#### (4) 調査の内容及び方法

開発した授業において、数量関係を理解し立式につなげるための関係図を児童がどのようにとらえ活用したのかを分析し、乗法・除法の数量関係を把握することにおける関係図の効果について明らかにする。算数科の授業終了時に調査用紙を配布し、調査する。調査用紙の構成は、アンケートと感想用紙からなる。まず、アンケートは、関係図に対する児童の関心度を7つの項目から調査するものである。次に、感想の欄は、授業を通しての感想を自由に記入させる。この2つの調査を3回にわたって行い、関係図に対する意識の変容を探る。関係図をかく手順の7つの項目をもとに作成したアンケートの項目を以下に示す。

1. 単位量に気をつけましたか。
2. 単位量あたりの量に気をつけましたか。
3. 単位量あたりの量を関係図のどこに書くのか気をつけましたか。
4. 同じ単位の量（なかよしの関係）に気をつけましたか。
5. 同じ単位の量を関係図のどこに書くのか気をつけましたか。
6. かけ算かわり算かに気をつけましたか。
7. 何を何でわるかに気をつけましたか。

#### (5) 調査結果と考察

1日目と3日間の平均値の差の検定を行った結果、7つの調査項目の内6項目において有意な差がみられた。また、児童の学習感想に以下のようなものがあつた。

1日目：「関係図の方が数直線より式が考えやすかった。」

2日目：「1日目より単位量に気をつけて、関係図をかけていた。かけ算かわり算かもわかるようになり出して、式が立てやすくなった。式を立てるときにも、何をかけるか、なにをわるかなども分かり出した。」「関係図をかいて、そこから割る数と割られる数がわかったつもりだったのに、式を立てるときには、数が大きい方を割られる数にしてしまった。」

3日目：「整数も小数も分数も、かけ算とわり算の関係は同じなんだと思い、びっくりしました。」

3日間の感想を考察してみると、1日目には、関係図から数量関係を把握していこうとする関心や意欲がうかがえる。2日目には、関係図から数量関係はとらえられるようになってきているが、数値が小数であるため、演算は決定できても、除法において大小方略の影響を受けてしまったことがうかがえる。3日目には、整数、小数、分数の数値であっても、関係図から乗法・除法の数量関係を

読み取ることができたことにより、関係図のよさを実感していると考えられる。

各項目の意識の変化と児童の感想と合わせると、次のような関係図の効果が考えられる。

- ・関係図は、乗法・除法の演算を判断する根拠になると考えられる。これは、関係図の基本の形に乗法の関係が見える矢印があるためだと考えられる。児童は、これを目安に乗法の演算を判断していると考えられる。また除法には、除法①と除法②の2つの除法がある。そこで、関係図に補助的な矢印を引くことにより、除法①、除法②の被除数と除数を判断できたと考えられる。
- ・関係図は、乗法・除法の数の拡張に効果をもたらすと考えられる。関係図は、文章題の文節ごとの意味を理解し、数量を関係図の3か所に記入し、数量関係をとらえる図である。その際に、数値の大小により、記入する場所が変わることがなく、数量の位置を固定できる。児童が関係図を用いることは、整数から小数、分数へと乗法・除法の数量関係の適用範囲が広がっても、数量関係の構造が同じであることを理解できることにつながると考えられる。
- ・関係図は、答えの見積もりをするときの根拠になると考えられる。例えば「1mの重さが2kgのロープがあります。このロープ3mの重さは何kgですか。」という問題を関係図に表した時、児童は、関係図から1mと3mの共変関係をとらえることにより、答えが2kgよりも多くなることを想像できると考えられる。しかし、児童が仮に立式を $2 \div 3$ とした場合には商が $2/3$ となり、2kgより少ないことから、立式の間違いに気付くことができると考えられる。

## 6 まとめ

整数、小数、分数の乗法・除法に共通した数量関係を把握する指導法を開発した。指導法の改善として、図的表現の1つである関係図を用いて、文章題から数量関係を把握する学習を展開した。実験授業の事前、事後調査をもとに検証を行った結果、関係図は、乗法・除法の数量関係を把握し、立式につなげることに効果的であることが明らかになった。今後、関係図を用いた学習方法を第5学年の小数の乗法・除法の単元に導入したいと考える。そして、関係図によって身に付けた乗法・除法の数量関係の理解が、その後の単位量あたりの大きさや割合、第6学年の分数の乗法・除法の学習に保持され、活用されることについて追跡調査を行い、関係図の効果の検証を深めたいと考える。

## 引用・参考文献

- ・Fischbein, E., Deri, M., Nells, & Marino, M.S.(1985): The Role of Implicit Models Solving Verbal Problems in Multiplication and Division, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.16, No.1, pp.3—17.
- ・Schwartz, J.L.(1988): Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations. In Hiebert, J. & Behr, M.(Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education Number Concepts and Operations in the Middle Grades* Lawrence Erlbaum Associates, The National Council of Teachers of Mathematics. Vol.2, pp.41—52.
- ・廣瀬隆司・齋藤昇・藤原伸彦・長谷川勝久・林隆宏・坂井武司・松下弘二 (2009): 「児童の数学に対する信念・価値・素質・感情・態度の向上を図る授業実践—第5学年の「小数×小数」「小数÷小数」の授業実践を通して—」『日本数学教育学会誌』日本数学教育学会、pp.6—8.
- ・石川廣美・林昭 (1991): 「新算数教育の理論と実際 第8章 数量関係」聖文社、pp.133—162.
- ・国立教育政策研究所 (2007): 「全国学力・学習状況調査[小学校]報告書 算数」
- ・国立教育政策研究所 (2010): 「全国学力・学習状況調査[小学校]報告書 算数」
- ・文部科学省 (2008): 「小学校学習指導要領解説 算数編」東洋館出版社、pp.1—189.
- ・東京書籍 (2010): 「新しい算数 5上」東京書籍、p.31、p.33、p.53.
- ・東京書籍 (2010): 「新しい算数 6上」東京書籍、p.25.
- ・吉田寿夫(1998): 「本当にわかりやすい すごく大切なことが書いてある ごく初歩の統計の本」北大路書房、pp.192—194.