様式４

数学的な見方・考え方を育成する本質的学習場の構成について

―教材開発の７つのストラテジーに基づいた教材研究と授業デザイン―

高知大学大学院総合人間自然科学研究科教職実践高度化専攻
指導教員　中野 俊幸
高知市立大津中学校 教諭　鈴江 暢朗

【研究の概要】
本研究では数学的な見方・考え方を育成する授業の具体を示すため，ドイツの数学教育学者 Wittmann の提唱する本質的学習場の理論に基づいた授業デザインについて研究し実践した。本質的学習場は，教材のもつ数学的発展性や価値とその教授可能性の十分な分析に基づいてデザインされた教授単元を指し，児童生徒に数学的に豊かな活動の場を提供するものである。数学的発展性などの分析にあたり，教材開発の７つのストラテジーによる教材研究を行った。また，動的幾何アプリケーション GeoGebra を活用することは，より高度な数学的活動の場を構成するのに有用であった。授業後のアンケートから，本質的学習場による授業デザインは生徒の数学的な見方・考え方の育成に効果的であったことが示唆された。今後の課題は教科書の教材をもとに本質的学習場の構成を試み，より多くの本質的学習場の開発と実践が必要である。

【キーワード】本質的学習場，数学的な見方・考え方，教材開発，教材研究，授業デザイン

1　研究の目的および方法

学習指導要領では，改定の基本方針の一つとして「主体的，対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進があげられている。また，深い学びを実現するうえで，「どのような視点で物事を捉え，どのような考え方で思考していくのか」というその教科特有の「見方・考え方」の重要性を示し，「児童生徒が学習や人生において「見方・考え方」を自在に働かせることができるようにすることにこそ，教師の専門性が発揮させせることが求められる」とされている。ここでの「数学的な見方」は「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」,「数学的な考え方」は「目的に応じて数，式，図，表，グラフ等を活用しつつ，論理的に考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら，統合的・発展的に考えること」とされている。このことからも，“方程式が解ける”や“関数のグラフがかける”,“図形の証明ができる”といった数学的な知識や技能を生徒に身につけさせるだけの授業でなく，習得した知識の相互関係を見いだして統合したり，問題を発展させて新たな性質を見いだしたりするような授業が求められていることが分かる。しかしながら学校現場では，教師自身がこのような数学的活動を体験したことが少なく，学習指導要領で謳われているような授業を具体的にイメージすることは難しく，どのように授業を改善し実践していくのかが分からないという現状がある。そのため結局，“教科書を教える”というような知識・技能の授業から脱却できていないように感じる。國本はこの現状をふまえ数学教師に求められる授業改善の視点を次のように述べている（國本 2009)。

『教師にとって，今日，最も重要なことは，指導法の研究ではなく（もちろん，これも重要であるけれども）教師自身が数学的活動を行うこと，すなわち，現実的・数学的状況に出合い，自ら問題を作り，結果を推測し，確かめ，証明し，反論し，一般化し，特殊化し，さらに新しい問題を作るなどを通して，理解にいたる道筋を探究することであり，「本質的学習場」(Wittmann 2001)を開発することである。』

ここにあげられる“自ら問題を作り，結果を推測し，確かめ，証明し，反論し，一般化し，特殊化し，さらに新しい問題を作るなど”は学習指導要領に示されている数学的活動である。本研究では，このような数学的活動を実現する本質的学習場の構成について研究し実践する。そして，その本質的学習場が生徒の数学的な見方・考え方の育成に効果的であったかどうかを考察す

る。なお，その方法として授業後の生徒に対するアンケート（５件法による選択および自由記述）の結果をもとに，“教材の適性”および“授業デザインの適性”，“数学的な見方・考え方に対する効果”の３つの観点から行う。特に自由記述に関して数学的な見方・考え方が表象したかどうかは片桐の示した数学的な考え方の分類（表１）のうち，Ⅱの「数学の方法に関する」を参考に行う。

表１　片桐による数学的な考え方の分類

Ⅰ数学的な態度に関する	Ⅱ数学の方法に関する	Ⅲ数学の内容に関する
1. 自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする 2. 筋道の立った行動をしようとする 3. 内容を簡潔明確に表現しようとする 4. よりよいものを求めようとする	1. 帰納的な考え方 2. 類推的な考え方 3. 演繹的な考え方 4. 統合的な考え方 5. 発展的な考え方 6. 抽象化の考え方 7. 単純化の考え方 8. 一般化の考え方 9. 特殊化の考え方 10. 記号化の考え方 11. 数量化，図形化の考え方	1. 集合の考え 2. 単位の考え 3. 表現の考え 4. 操作の考え 5. アルゴリズムの考え 6. 概括的把握の考え 7. 基本的性質の考え 8. 関数の考え 9. 式についての考え

また，これをもとに教師自身が本質的学習場の構成を通して体感した数学的な見方・考え方の育成についての数学教育観を省察し，今後の数学学習指導の在り方を考察する。

２　本質的学習場の構成

⑴　本質的学習場について

ドイツの数学教育学者であるWittmannは，数学教育学をデザイン科学と捉え，その核心は，ある教材で構成される教授単元（Teaching Units）をデザインすることであると主張した（Wittmann 1995)。そして，次の４つの要素をもった教授単元を本質的学習（SLEs: Substantial Learning Environments）と定義し（Wittmann 2001)，授業を改善するには，第一に本質的学習場を開発・研究し，授業としてそれを実現することが何よりも重要であるとしている。

《本質的学習場の条件》

a.　ある水準での数学教育の主要な目標，内容，原理を表象していること
b.　この水準を超えた意義のある数学的な内容，過程，方法と結びついており，それは数学的活動の豊かな源泉になっていること
c.　柔軟性をもち，個々の学級の実態に合わせることができること
d.　数学教育についての数学・心理学・教授学的観点を統合し，実践的研究の豊かな場を形成できること

本質的学習場の条件を日本の算数・数学学習指導と関連付けて解釈すると次のようになる。

a.は，算数科・数学科の目標や内容・方法，数学的見方・考え方などの学習が，その教授・学習単元つまりその教材による学習で具現化できるかである。逆に，その教材は，学習指導要領で示されている当該学年の学習目標やその学年の算数・数学指導上の目標や内容・方法に位置づけることができるかということになる。

b.は，本質的学習場の「本質的（”Substantial”)」という言葉の意味と最も関連する観点といえる。この言葉は「数学的発展性と深淵な数学的意義があり，数学的活動の豊かな源泉になっている」と読みかえることができよう。つまり，本質的学習場は，児童・生徒が数学的な見方・考え方を働かせて数学的問題解決や数学化などの数学的活動に臨むことができる場を意味するのである。該当の教材による授業デザインがそのような学習場を構成できているかがこの条件である。

ｃ.は，授業対象の学級の様々な児童･生徒の実態に合わせた多様なアプローチを可能にするものであるかである。例えば，記号的操作が困難な児童･生徒でも，図的操作や具体的操作によって探究活動に参加することが可能であるといった教授学的柔軟性である。この柔軟性を広く捉えると，発達段階や学校種・学年を超えて扱うことのできる教材であると同時に，授業対象の学年に適した指導方法や授業デザインを構想することが可能であるかを問うものである。

ｄ.は，数学的教材の開発・研究を，大学や研究所の理論的研究者と授業を実践する教育現場の教員が共同して行うことができるものであるか，さらにその教材を使った授業をデザインして研究授業を行い，その教育的効果と課題を実践的かつ理論的に省察するような実践的研究を推進することにつながったかである。

⑵　本質的学習場の構成方法について―教材開発の７つのストラテジーと動的幾何学習場―

ところで，上述のような本質的学習場を構成するためには，教材のもつ数学的発展性とその深淵な数学的価値を分析し，また，生徒への教授可能性を検討するとともに具体的な学習指導法を考案する必要がある。本研究では，このための方法として，中野が開発している教材開発の７つのストラテジーを活用した。内容は次の通りである。

①　ある変数を連続的に変化させ並べる	関数的関係（共変性・不変性）への着目
②　ある条件・性質を否定して変更する	what-if-not ストラテジー
③　問いと答えを逆転させる	逆・裏の命題，十分性を考える
④　セッティングを変える	領域をこえた思考
⑤　図を動かす	連続的変化と共変性・不変性への着目
⑥　範囲の制限をはずす	物理的・時間的制約を超える
⑦　次元を変える	平面から空間に，変数を増やす

さらにストラテジーを適用する際に，動的幾何アプリケーション GeoGebra を適宜用いて教材のもつ数学的発展性や数学的活動の開発・研究を行う。この GeoGebra は，単純な操作で種々の関数のグラフや平面図形などを正確に表現・作図することができ，点や線をドラッグすると，それに依存する他の図形の構成要素も対応して変化する機能を備えたアプリケーションである。Sinclair らは，このような動的幾何アプリケーションを DGEs(Dynamic Geometry Environments)と呼び，その利点として，「図形の性質を保ったまま，図形を変形できること」を挙げている(Sinclair,N&Robutti,O　2013)。また，静的な変化（例えば，図１のように変化の過程をコマごとに示した一連の図など）にはない連続性（ストラテジー①とも関係する）を DGEs がもつことも大きな利点で，それは図形の連続的な変化から共変性と不変性（性質・定理）を見いだすことを可能とする。さらに，共変性と不変性を動的に表象できることから，DGEs は数学的教具の“理解や説明を促す役割”や“新たな性質や課題の発見を促す役割”を果たすことも期待される。

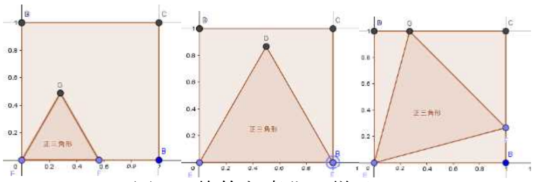

図１　静的な変化の様子

そして，このような DGE s（特にここでは GeoGebra のことを指す）は児童生徒の思考ツールや学習補助だけでなく，教師の教材開発・研究にも大いに貢献するものと考える。その理由として先述の教材開発の７つのストラテジーとの関連をみたとき，①は先述の通り，②は条件の変更（正三角形を二等辺三角形に変更するなど）をすみやかに図形として表象できること，③は②と同様，⑤は DGEs の長所そのもの，⑥は数の範囲を拡張したり，時間による変化（図形の軌跡など）を表現したりできること，⑦は平面図形を空間図形にしたり，多変数のグラフを表現したりできることなどが考えられるからである。

３　ストラテジーに基づいた教材開発の実際

２年間の研究で，下記の教材について教材研究および授業実践を行った。また，教材開発・研究および授業実践において ICT（主として GeoGebra）を活用した教材については○を付記した。

実施年月日	教材名	領域	学年	ICT
3.　7.13	三角数	数と式	1	
3.　9.28	1089 の秘密	数と式	2	
3.11.19	グラフを活用した問題解決	関数	2	○
3.12.14	はとめ返し	図形	3	○
4.　5.25	三角数	数と式	3	

実施年月日	教材名	領域	学年	ICT
4.　6.17	倍数判定法	数と式	2	
4.　7.15	アリスモゴン	数と式	2	○
4.　9.13	ピックの定理	図形	3	○
4.10.25	折り紙の数学	図形	3	○
4.11.18	鏡の本と図形の移動	図形	1	○

ここでは前節で述べた教材開発の７つのストラテジーを用いた教材開発とそこから見いだされる数学的発展性と教授可能性について，実際に開発した教材のなかから“アリスモゴン”を取り上げ示すことにする。

⑴　教材「アリスモゴン（Arithmogons）」について

アリスモゴンは，イギリスの数学教育学者である McIntosh らが提案した教材（図２左）で，「□にあてはまる数は，その両隣の○の中にある数の和である」というシンプルな規則からなるものである（McIntosh＆Quadling 1975）。Wittmann は，アリスモゴンを教授単元の典型的教材として図２右の形態で示した（Wittmann 1995）。この形態では図２左の○にあたる数が図形の内側の数に，□にあたる数が図形の外側の数に対応している。この形態は，小学生におはじきなどを使った具体的操作させることをねらって変形したと考えられる。以下では，Wittmann の形のアリスモゴンに対して教材開発の７つのストラテジーのいくつかを用いて，どのような教材が開発できるかを考察する。

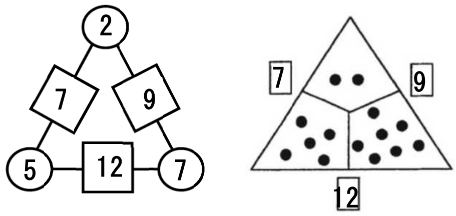

図２　McIntosh らのアリスモゴン(左)と Wittmann のアリスモゴン(右)

⑵　アリスモゴンの数学的発展性と教授可能性の考察

原問題として「内側の３つの数が与えられて外側の数を求める問題（図３上左）」を考え，この原問題を出発点としてストラテジーを適用することでアリスモゴンの数学的発展性が明らかになった（図３）。ここで，ストラテジーを用いて，問題を発展させていったそれぞれの段階を Phase1，Phase2，Phase3，Phase4 とし，それぞれの段階において展開される数学的活動や教授可能性について説明する。

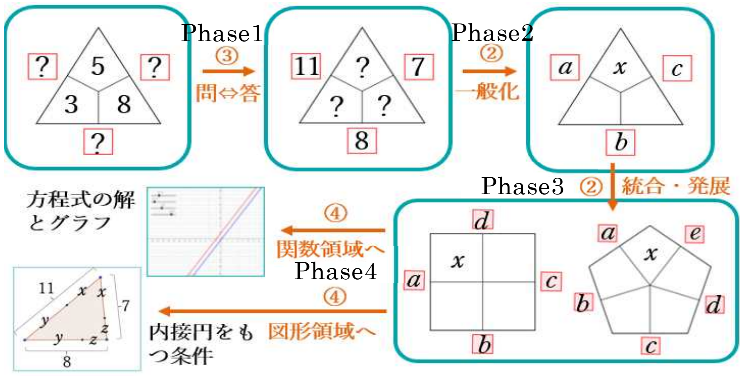

図３　ストラテジーの適用によるアリスモゴンの数学的発展性

Phase1 では，「単純な加減で算出できる問題」から「単純な加減では算出できない問題」へと問題が発展している。中学校段階では，方程式を活用して解決を図る活動となる。方程式の立式に関しては「一元一次方程式」か「三元一次連立方程式」によるものが考えられる。一元一次方程式による立式は，内側の数のいずれか（今回は頂上の数）をxとして，図４左$(11-x)+(7-x)=8$，図４右$x=7-8+11-x$ の大きく２通りが考えられ，三元一次連立方程式による立式は $\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=8 \\ z+x=7 \end{cases}$ となる（図５左）。

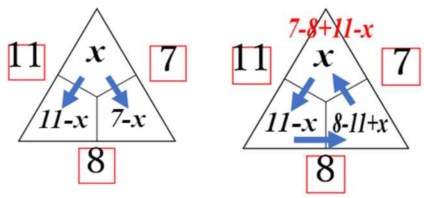

図４ 一元一次方程式による立式過程

Phase2 では「具体数によるアリスモゴン」を「文字によって一般化されたアリスモゴン」へと発展させている。さきほど立式した方程式を適用すると，アリスモゴンの一般解 $x=\frac{a-b+c}{2}$ が得られる。また，得られた一般解からアリスモゴンの外側の数と解（内側の数）の関係が明らかになる。例えば，$a-b+c$ の値が偶数になるとき，解は必ず整数になり，奇数になるようにすれば分数になる。また，$a+c<b$ ならば解は負の数になる。このように一般化の段階では一般解が求まるだけでなく，解が整数となる条件や負の数になる条件といったアリスモゴンの問題設定に関する構造を見いだすことができる。これはまさに，一般化して考えることの重要性のひとつであると考える。

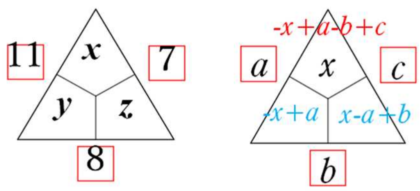

図５　連立方程式による立式過程(左)
一般化したアリスモゴンの立式過程(右)

Phase3 では数の一般化だけでなく，図形の一般化も図ることで，アリスモゴンの構造や性質をさらに探究している。

まず，図 4 左の解法を四角アリスモゴンに適用すると，図 6 のような２通りの立式が考えられる。同様に，五角アリスモゴンでは３通りの立式，六角アリスモゴンでは４通りの立式が考えられる。しかし，この段階ではこのような立式方法を複数考えるよりも，統一した立式方法で一般解を考察することによって，角数との関係や解の構造・方程式の可解性を考察させることに数学的価値があると考える。そのため，複数の立式方法を生じさせる図 4 左の解法はこの段階において適当でないと考える。

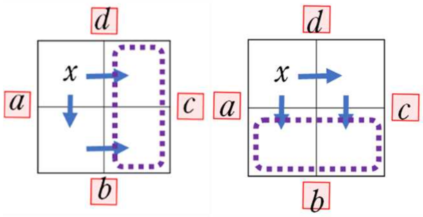

図 6 四角アリスモゴンへの解法の適用

次に図 4 右の解法を適用すると１通りの立式となる(図 7)。これは五角アリスモゴン，六角アリスモゴン，…，n角アリスモゴンにおいても同様である。

最後に連立方程式による解法である。四角アリスモゴンでは四元一次方程式，五角アリスモゴンでは五元一次方程式というように図形を発展させるにつれ，扱う文字が１つ増えていく。これを文字消去して一元一次方程式にしようとすると複雑になる。また，行列で表現し，線形代数として可解性を考察することは中学校段階では不可能である。

以上より，アリスモゴンの一般化を図る際には図 4 右の方法が中学校段階では最適である。

さて，三角アリスモゴン，四角アリスモゴン，五角アリスモゴンの方程式を観察すると（このように三角，四角，五角と連続して調べることは，ストラテジー①を活用している）その構造に次の（ア），（イ）のパターンがあることに気づく。

（ア） 奇数角アリスモゴンでは，右辺のxの符号は$-$，偶数角アリスモゴンでは，$+$である。

（イ） 右辺の各項の符号が交互に繰り返している。

(三角)$x=-x+a-b+c$

(四角)$x=+x-a+b-c+d$

(五角)$x=-x+a-b+c-d+e$

(六角)$x=+x-a+b-c+d-e+f$

図 7 アリスモゴンにおける方程式の構造

このパターンからn角アリスモゴンにおける方程式を帰納的に推論することができる。n角アリスモゴンにおける外側の数を a_1，a_2，a_3，…，a_n とすると

$$\begin{cases} n \text{ が奇数} \Rightarrow x=-x+a_1-a_2+a_3-\cdots+a_n \\ n \text{ が偶数} \Rightarrow x=\quad x-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_n \end{cases}$$

となる。これらの方程式から，奇数角アリスモゴンでは解が一意に定まり，偶数番目の和を$a_2+a_4+\cdots=S_{偶数}$ ，奇数番目の和を$a_1+a_3+\cdots=S_{奇数}$ とすると一般解は $x=\frac{S_{奇数}-S_{偶数}}{2}$ と表される。また，偶数角アリスモゴンでは，不定解（すべての数が解となる）と不能解（解が存在しない）があることがわかり，その条件は

$$\begin{cases} S_{奇数}=S_{偶数} \Rightarrow \text{不定解（どんな数でもアリスモゴンが完成する）} \\ S_{奇数}\neq S_{偶数} \Rightarrow \text{不能解（アリスモゴンを完成させる数は存在しない）} \end{cases}$$

である。

以上のことから図形の一般化の段階では，多角形アリスモゴンの解決の統合化が図れただけでなく，その過程ではこれまでの解決方法を適用するだけでなく，解決過程をふりかえり吟味する活動や方程式や図形の構造に着目し，パターンを見いだす活動が内在している。

Phase4 では，事象を異なる領域の問題として捉え，新たな性質や問いを探究している。

関数領域の問題として解釈すると，中学校で扱う「方程式のグラフと解の関係」の内容となる。また，図 7 の方程式の左辺と右辺をxの関数とみると，三角アリスモゴン，四角アリスモゴンはそれぞれ $\begin{cases} y=x \\ y=-x+a-b+c \end{cases}$ ， $\begin{cases} y=x \\ y=x-a+b-c+d \end{cases}$ とそれぞれ表すことができ，グラフは図 8 のようになる。ここで，グラフの切片はアリスモゴンの外側の数の和となるため，外側の数を変化させることは，関数的には座標平面上でグラフが平行移動することに対応

している。また，アリスモゴンの解は２つのグラフの交点の座標である。これらのことから，三角アリスモゴンの解の一意性は２つのグラフが１点で交わることと対応し，四角アリスモゴンの不定解，不能解は，２つのグラフが一致するか平行で決まり，それらは切片の値 $S_{奇数}-S_{偶数}$ によって決定される。

このように数と式領域のアリスモゴンを関数領域の問題として解釈することは，関数領域における内容の理解を深めるだけでなく，方程式の解の意味を再認識したり，偶数アリスモゴンが不定解や不能解になる理由や条件の意味について理解したりするといった数と式領域での学びを振り返り，理解を深める機会を生徒に提供する。

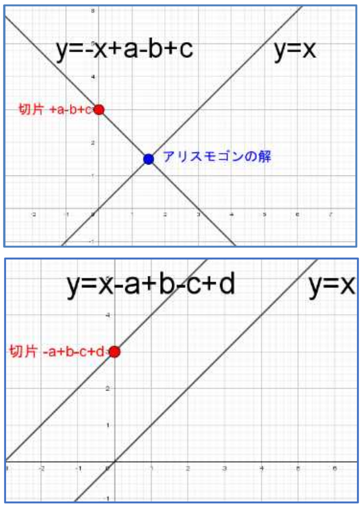

図８　「関数」領域への拡張

次に図形領域の問題として解釈すると，「三角形において３つの辺の長さが与えられているとき，各頂点を中心とし，他の２円と接するような３円があるか。あるならばその半径はいくつか」という問い(図 9)を設定できる。この問いはさらに次の命題や発展的な問い(図 10)を導く。

(命題１)　２円の共通接線を３つ引くと１点で交わる。
(命題２)　その点は三角形の内心である。
(発展的問い) 四角形の場合でも同様の命題が成り立つか。
また，それはどのような条件か。

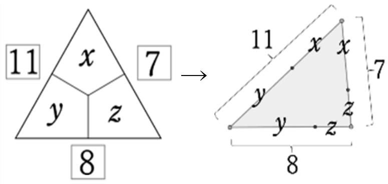

図９　「図形」領域への拡張

これらの命題は，中学校で扱う「基本的な図形の性質」の内容や高等学校における「ベクトル」，大学における「線形代数」の問題に発展させることもできる（Wittmann 2005，袴田＆大滝 2019)。

(命題 2)　(発展的な問い)

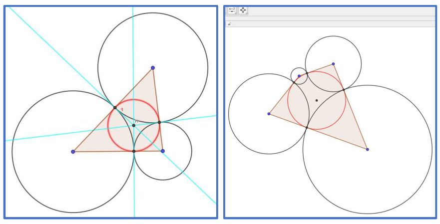
図 10　アリスモゴンの図形領域での性質

以上のように，領域を超えて問題を解釈することは，その領域での新たな数学的価値や発展性を明らかにすることができる。このことは一つの教材から多様な領域での授業デザインを可能とし，目の前の児童生徒に適した授業や単元を開発することができる。

⑶　中学校におけるアリスモゴンの授業デザインの実際

中学校数学科の目標および内容へのアリスモゴンの位置づけとしては，「数と式」領域における方程式の活用や文字式で表現したり，文字式を読み取ったりすることである。そのため，まず具体数による三角アリスモゴンと四角アリスモゴンの解決を求め，次に方程式による解決を必要とする状況を与え，文字式によってアリスモゴンの解の特徴やその条件を探究するような授業デザインが考えられる。具体的な問題として図 11 のように(1)は整数解，(2)は分数解，(3)は不定解，(4)は不能解となるように設定した。(1)は直感的にも求められ，(2)では方程式を用いる必要性が生じる。(3)や(4)では，「どんな数でも成り立つもの」と，「どんな数でも成り立たないもの」があるというこれまで生徒の学習経験にない現象に出会わせることができる。さらに，具体数のアリスモゴンから文字を用いたアリスモゴンへと問題を発展させる(図 12)ことで，「三角アリスモゴンや四角アリスモゴンにおいて，外側の数と解にはどのような関係があるか」，「五角アリスモゴンや六角アリスモゴンでも同じように考えられるのか」といった高次の数学的活動が展開される。

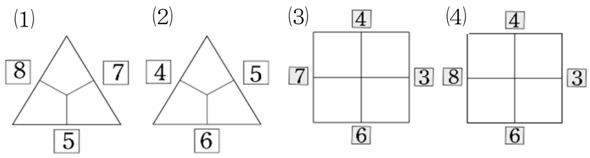

図 11　アリスモゴンの具体的な問題(具体数)

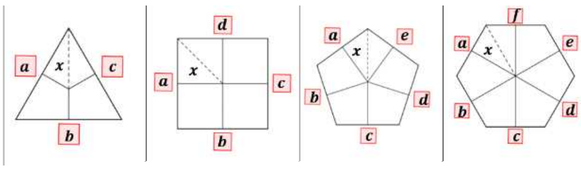

図 12　アリスモゴンの具体的な問題(文字)

４　GeoGebra による動的幾何学習場の構成の実際

第２節で述べた DGEs の構成の具体を，教材開発・研究したものからいくつか紹介し，それらの DGEs によって展開される数学的活動について考察する。

⑴　はとめ返し

はとめ返しとは，任意の四角形において，各辺の中点をとり，向かい合う中点同士を結んだ線分によって分割される４つの四角形は，180°の回転移動のみで平行四辺形となる操作のことをいう(図 13)。これを GeoGebra で表現し（図 14)，操作することで，次のような発展的な問いを生成する数学的活動が展開される。

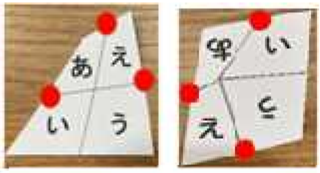

図 13　四角形のはとめ返し

・どんな四角形でもはとめ返しができるか。できるならば必ず平行四辺形になるか。
・はとめ返しでできる四角形が平行四辺形以外の場合はあるか。あるならばその条件は何か。
・分割の方法は他にないか。あるならばできる四角形はどのようなものか。

ここで DGEs に関して優れている点は，凸型以外の四角形に対してもはとめ返しを試行できる(図 13)ことである。特に図 13 中と右の場合は，中点同士を線分で結んだとき４つの四角形に分割されない。つまり，実際の紙（図 12 のように）では再現できない場合も DGEs では表現，操作，検証することが可能である。このように DGEs は物理的な制限を超えた現象も考察できる。

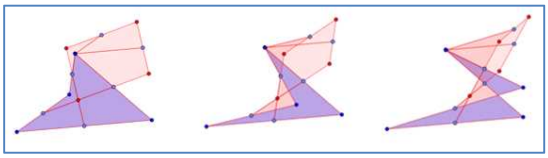

図 14　GeoGebra による凹四角形等での検証

⑵　ピックの定理

この定理は 1899 年に G.A. Pick によって初めて示された定理で，格子点を頂点とする格子多角形の面積が格子点の数によって定まるというものである。ストラテジー④を用いて，関数領域からのアプローチを試みると，格子点の数と面積の関係が１次関数的に変化することが分かる。GeoGebra ではドラッグによって図形を変形できるだけでなく，そのときの面積や格子点の数を表示することもできる（図 15)。このように図形の正確な面積や線分の長さ，角度を瞬時に測定できるのも DGEs の利点で，これは生徒が図形を変形するごとに面積を求めたり，格子点の数を数えたりといった作業を省き，定理の本質である面積と格子点の数の関係を発見する数学的活動により多くの時間を割くことを可能とする。

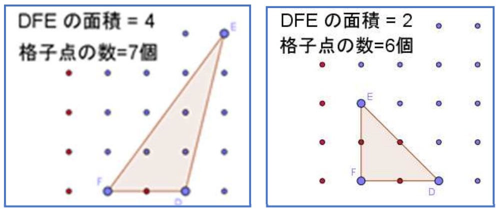

図 15　GeoGebra によるピックの定理の探究

⑶　鏡の本と図形の移動

Wittmann は教材「Double Mirror Magic」において，２枚の合わせ鏡によってできる像の特徴から図形の対称性の基本的な考え方を，児童生徒自ら発見する機会を与えている。実際に２枚の合わせ鏡をおいてみる（図 16）と像０と像 M1 は鏡面を対称軸として対称移動しており，さらに像 M1 と像 M2 も対称移動している。また，像０と像 M2 は鏡の接合部を回転の中心として回転移動している。これは２回の対称移動が１回の回転移動に合成されることを示し，GeoGebra で再現することができる（図 17 中・左)。また，２本の対称軸が平行な場合は２回の対称移動は１回の平行移動に合成される(図 17 右)。

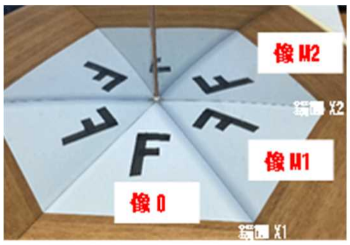

図 16 ２枚の合わせ鏡による像

さらに，回転移動の角度と平行移動の距離も相互に関連し，対称軸の成す角と距離に起因することも GeoGebra の操作や測定機能によって発見させることができ，その理由については基本的な平面図形の性質に基づいて説明することができる。

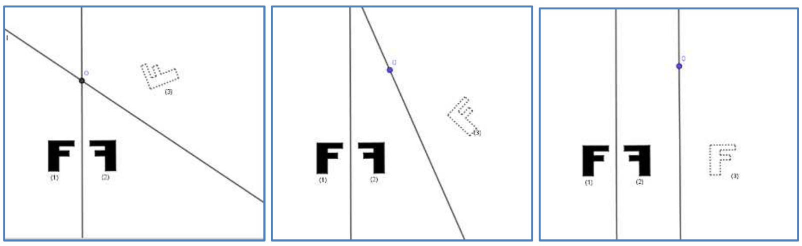

図 17 GeoGebra による２回の対称移動の合成結果

5　研究の成果と今後の課題

授業実践後の生徒へのアンケート（５件法）を総括した結果ではいずれの項目も高い評価を得た(表２,n=166)が，特に 4.5 以上の高い評価を得ているものとして，項目１と４からは生徒の教材に対する高い満足度が，項目２からは授業デザインに対する高い評価が伺える。また，自由記述の設問「数学的に面白いと感じたことは何か」と設問「さらに探究したいことは何か」に対する主な回答(n=166)とそれらを表１のⅡの数学的な方法の考え方と対応させたものが表３である。これらの生徒の回答から，数学的見方・考え方の育成が図られたことが示唆される。

表２　授業アンケートの結果の総括

項目	平均
1 授業の題材はおもしろかった	4.5
2 先生の授業の進め方はよかった	4.6
3 今日の授業はよくわかった	4.3
4 あたらしい発見や気づきがあった	4.5
5 とても考えた	4.4
6 友達の考え方に感動した	4.0
7 自分なりにがんばれた	4.6

表３　生徒の自由記述に対する主な回答と表１との対応

生徒の自由記述の回答	数学的な方法の考え方
たかが数字にきまりがあったことが面白い(他 13 件)	帰納的な考え方
規則があり，新たな発見を得られるところ(他 22 件)	類推的な考え方
図形の特徴を利用して説明や解決をしたところ(他 26 件)	演繹的な考え方
すべての移動は対称移動につながっていることが面白い(他 20 件)	統合的な考え方
もっとほかの四角形は作れないか(他 39 件)	発展的な考え方
他の多角形や複雑な図形で成り立つか考えたい(他５件)	一般化の考え方
日常生活で使うものにも数学に関係しているものがある(他 10 件)	特殊化の考え方
図形にして考え，数式を使って解くこと(類似他 14 件)	記号化の考え方 数量化，図形化の考え方

これらの生徒の反応から数学的見方・考え方の育成には，教材開発の７つのストラテジーや DGEs を活用して本質的学習場を構成して生徒に価値ある数学的活動を提供したことが効果的であったと考えられる。一方，教材開発の７つのストラテジーを指針とし，DGEs を活用した本質的学習場の構成を探究することは，教師自身が数学的な見方・考え方を働かせて数学的活動を再体験することになり，その体験こそ，教師の“教材をみる目”と“授業をつくる腕”を鍛えるものであり，授業改善の礎であると実感した。

今後の課題としては中学校段階での本質的学習場の実践例はいまだ少なく，例えば教科書の発展問題などを素材とした本質的学習場の構成が可能かといった研究，実践を行い，より多くの本質的学習場の開発および実践を行うことが課題であると考える。

6　文献

McIntosh, A., & Quadling, D. (1975). Arithmogons. Mathematics Teaching, 70,8-23.

Müller,G.N.&Wittmann,E.Ch.(1997). Double Mirror Magic. Ernst Klett Grundschulverlag.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. Third international handbook of mathematics education, 571-596.

Wittmann,E.Ch.(2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process,Educational Studies in Mathematics48(1), 1-20.

片桐重男「数学的な考え方の具体化と指導－算数・数学科の真の学力向上を目指して（数学的な考え方とその指導)」(明治図書)

國本景亀(2009)「生命論に立つ数学教育学の方法論一自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して一」, 全国数学教育学会誌数学教育学研究,第 15 巻,第２号 pp. 1～15

中野俊幸(2021)「いかにして数学的見方・考え方を育成する授業をデザインするか」高知大学教職大学院オープン講座資料

袴田綾斗, & 大滝孝治. (2019). 教員養成のための線形代数コースの開発にむけて. 日本科学教育学会研究会研究報告, 34(3), 299-302.

中学校学習指導要領解説数学編（平成 29 年７月）

動的幾何アプリケーション GeoGebra; https://www.geogebra.org/