数学科の主体的・対話的で深い学びにつなげる授業改善

—学びを深める教材と指導法の開発—

高知大学大学院総合人間自然科学研究科教職実践高度化専攻　指導教官　中野　俊幸
日高村立日高中学校　教諭　　村田　由香梨

１　はじめに

高知県の中学校数学の学力の現状として全国学力・学習状況調査の結果において、年々向上が見られるものの依然として全国平均を下回る状態が続いており、主体的・対話的で深い学びの実現にむけた授業改善を通して現状の改善を図ることが求められている。

２　研究の目的

中学校数学の授業改善が十分に進んでいない要因として、これまでの実践経験をもとに次の２点が考えられる。

①生徒の数学に対する学習観や姿勢を客観的に分析できていない

②数学的な思考力を向上させるための発展的な教材や効果的な学習指導方法の開発が十分になされていない

要因①については、生徒の数学観（数学をどのような教科とみているか、数学の学習や勉強をどのように考えているか)、生徒の数学に関する興味関心（どういうことにおもしろいと感じているか、どういうときに意欲がわくのか）について客観的に捉えることができていない。さらに、そのことと数学の学習指導方法との関係について明確に捉えられていないためと考えられる。

要因②については、中学校数学の教材開発に関わる数学教育学の理論についての知識が乏しく、理論に基づいた具体的教材の開発や授業実践、その教育的効果を検証することが十分に行われていないためと考えられる。

そのため、要因①に対しては、生徒のもっている数学観と数学のおもしろさに関する意識を客観的に測定できる道具を開発し、生徒の実態を調査、分析・考察する。また、その結果を授業改善や教材開発につなげる。

要因②に対しては、数学学習理論に基づいて、生徒の興味関心を引き出し、数学的に価値が高く思考力を向上させ、学びを深める教材とその効果的な学習方法を開発する。研究授業を実践して①②で開発した測定道具と授業の有効性と課題を検証し、改善を図ることが本研究の目的である。

３　研究内容

⑴　数学観と意識変容の測定道具の開発

生徒の実情を客観的に分析するため、数学観と数学のおもしろさに関する質問紙を作成した。作成に当たっては、中原・中野ら(1994)の研究をもとに国際比較調査問題(PISA、TIMSS)を参考にし、全国学力・学習状況調査問題の生徒質問紙の項目を一部取り入れた。それぞれの項目と観点は、表１、表２の通り。質問項目に対して４件法（４：当てはまる、３：どちらかというと当てはまる、２：どちらかというと当てはまらない、１：当てはまらない）で得点４、３、２、１を与えた。ただし、項目 M53 は逆転項目になっている。なお、全国学力・学習状況調査の生徒質問紙と同じ項目は、M11、M12、M13、M32、M33、M41、M42、M43、M51、M52 である。

表１　数学観に関する調査

観点		質問内容
好嫌感・価値観・理解度	M11	数学の勉強は好きだ
	M12	数学の勉強は大切だ
	M13	数学の授業の内容はよくわかる
精神陶冶性	M21	数学を勉強すると，理由をもとにすじみちを立てて考えることができるようになります
	M22	数学を勉強すると，いろいろな考えを思いつくようになります
	M23	数学を勉強すると，頭の回転が速くなります
実用性・キャリア教育としての有用性	M31	私は数学を必要とする仕事をしたいと思います
	M32	数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考える
	M33	数学の授業で学習したことは，将来，社会に出たときに役に立つ
問題を解く態度	M41	数学の問題の解き方がわからないときは，諦めずにいろいろな方法を考える
	M42	数学の授業で問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える
	M43	数学の授業で公式やきまりを習うとき，その理由を理解するようにしている
向上心・学習法	M51	数学ができるようになりたい
	M52	数学の授業で問題の解き方や考え方がわかるようにノートに書いている
	M53	いくら一生懸命がんばっても，数学ができるようになるとは思えません

表２　数学のおもしろさに関する調査

観点		質問内容
数学的真理、論理性、答えの一意性	A11	知らなかったことや新しいことが分かるようになったとき
	A12	なぜそのようになるのかを考えているとき
	A13	自分の答えが正解だったとき
	A14	どうして間違っているのかが理解できたとき
創造性・発見性	A21	自分の考え出したことが、問題を解決するのに役立つとき
	A22	習った事柄によって、さらに新しいことがわかったとき
	A23	自分で新しい問題を作るとき
	A24	自分の解き方とは別の解き方や考え方が見つかったとき
数学に取り組む意欲	A31	問題が簡単に解けるとき
	A32	やさしい問題よりも、難しい問題にチャレンジしているとき
	A33	テストでよい点がとれたとき
	A34	先生が難しい質問をしないとき
社会性・協調性	A41	数学の問題が自分一人で解けたとき
	A42	友だちと協力して作業したり問題を考えているとき
	A43	自分の考えをうまく表現することができたとき
	A44	私の考えを、友だちや班のメンバーが理解してくれたとき

以上の項目をランダムに並べて質問紙を作成した。
２年目は、数学観のアンケートの質問内容を見直し観点を４観点、12 項目に変更した。

(2)　生徒の数学観と数学に関する興味関心の調査実施と分析

ア　アンケートの調査の実施

実施対象：Ａ中学校　中学１年 21 名（男子９名、女子 12 名）、
中学２年 23 名（男子 15 名、女子８名）、
中学３年 32 名（男子 15 名、女子 17 名）　計 76 名

実施日：数学観に関するアンケート調査　　　　　：平成 30 年６月５日（火）
数学のおもしろさに関するアンケート調査：平成 30 年６月 12 日（火）

イ　アンケート調査結果

アンケート調査における平均値と標準偏差は、次の表３、４の通りである。

表３　数学観に関する調査結果

数学観に関する調査　（対象：全校生徒76名,実施：72名）　2018年6月

観点		質問内容	平均値	標準偏差
好嫌感・価値観・理解度	M11	数学の勉強は好きだ	2.94	.902
	M12	数学の勉強は大切だ	3.56	.554
	M13	数学の授業の内容はよくわかる	3.29	.759
精神陶冶性	M21	数学を勉強すると，理由をもとにすじみちを立てて考えることができるようになります	3.22	.736
	M22	数学を勉強すると，いろいろな考えを思いつくようになります	3.25	.746
	M23	数学を勉強すると，頭の回転が速くなります	3.31	.799
実用性・キャリア教育としての有用性	M31	私は数学を必要とする仕事をしたいと思います	2.44	.948
	M32	数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考える	2.63	.795
	M33	数学の授業で学習したことは，将来，社会に出たときに役に立つ	3.44	.603
問題を解く態度	M41	数学の問題の解き方がわからないときは，諦めずにいろいろな方法を考える	3.25	.707
	M42	数学の授業で問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える	3.15	.867
	M43	数学の授業で公式やきまりを習うとき，その理由を理解するようにしている	3.29	.721
向上心・学習法	M51	数学ができるようになりたい	3.78	.481
	M52	数学の授業で問題の解き方や考え方がわかるようにノートに書いている	3.54	.711
	M53	いくら一生懸命がんばっても，数学ができるようになるとは思えません	1.54	.749

表４　数学のおもしろさに関する調査結果

数学のおもしろさに関する調査　（対象：全校生徒76名,実施：72名）　2018年6月

観点		質問内容	平均値	標準偏差
数学的真理、論理性、答えの一意性	A11	知らなかったことや新しいことが分かるようになったとき	3.51	.673
	A12	なぜそのようになるのかを考えているとき	3.00	.756
	A13	自分の答えが正解だったとき	3.69	.550
	A14	どうして間違っているのかが理解できたとき	3.41	.709
創造性・発見性	A21	自分の考え出したことが、問題を解決するのに役立つとき	3.44	.626
	A22	習った事柄によって、さらに新しいことがわかったとき	3.48	.652
	A23	自分で新しい問題を作るとき	2.70	.885
	A24	自分の解き方とは別の解き方や考え方が見つかったとき	3.28	.680
数学に取り組む意欲	A31	問題が簡単に解けるとき	3.63	.567
	A32	やさしい問題よりも、難しい問題にチャレンジしているとき	2.70	.947
	A33	テストでよい点がとれたとき	3.83	.478
	A34	先生が難しい質問をしないとき	3.03	.828
社会性・協調性	A41	数学の問題が自分一人で解けたとき	3.61	.597
	A42	友だちと協力して作業したり問題を考えているとき	3.42	.768
	A43	自分の考えをうまく表現することができたとき	3.35	.719
	A44	私の考えを、友だちや班のメンバーが理解してくれたとき	3.35	.776

数学観に関するアンケートでは、実用性・キャリア教育としての有用性の観点の平均値が低く、数学の勉強をすることについての有用性は感じているものの、学習内容と普段の生活の実感や将来の仕事との関連をあまり実感していないことが表れている。数学に関する興味・関心であるおもしろさに関するアンケートでは、新たな数学的真理に気づかせたり、生徒自ら問いを発展させたりするような授業が十分に実践されていないことや難しい問題にチャレンジし、自ら解決方法を探究する問題解決的学習がほとんど実践されていないことが表れていると考えられる。

⑶　数学学習理論に基づいた、生徒の興味関心を引き出し、学びを深める教材とその効果的な学習指導方法の開発

ア　問題発見・解決の過程と本研究の授業デザインとの関連

効果的な学習指導方法について、新学習指導要領の解説では、学習過程のイメージとして図１のように示されている。本研究では、このような学習指導を具体化し実現するために、現実の世界のサイクルを数学的モデル化、数学の世界のサイクルを Freudenthal.H の数学化、What-If　-Not ストラテジーなどの問題設定、動的幾何学習場の数学教育の学習理論をもとに教材を開発し、授業研究を行った。

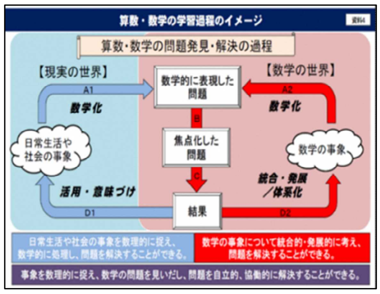


図１　算数・数学の学習過程のイメージ

イ　数学的モデル化の理論による教材と授業の開発

㈠　数学的モデル化の理論について

数学的モデル化とは、図２のように現実世界の問題を単純化や理想化などの数学的定式化を行い、数学的モデルを作成する。そのモデルを数学的に処理し、その数学的結論を導き、その結果を現実の世界に解釈し評価する一連の活動である。（三輪　1983）

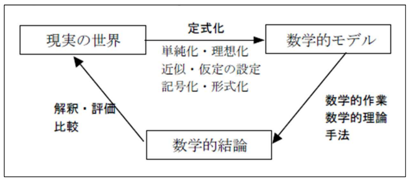


図２　数学的モデル化過程

㈡　連立方程式の授業デザインと実践

ａ　教材と授業デザイン

学校生活の事象として学校給食の献立作りをとりあげ、給食の献立づくりにおいて栄養素の割合を考慮して食材の重さを決定していることを教材化した。（図３）栄養教諭、家庭科担当教員と協力し、実際に生徒に提供された給食の数値を使った。授業では、副菜全体の重さと栄養素の条件に着目して連立方程式をつくり、食材それぞれの重さを連立方程式により求める活動を中心に構成した。

問題１　じゃこピーマン 40 で
　カルシウムを 55 mg とるには
　じゃこ と ピーマンをそれぞれ何ｇにすればよいでしょう？

図３　開発した教材（２年　連立方程式の活用）

ｂ　研究授業から得られた成果と課題の考察

生徒は、この授業を通して身近な日常生活の事象を連立方程式の数学的モデルを使って解決する活動を体験することができた。結果を現実の世界に解釈し評価する場面では、連立方程式によって求めた解が、実際の食材の量と一致していることに多くの生徒は感動していた。数学的モデル化の理論による授業デザインにより数学と実生活の結びつきを実感させることができた。

ウ　Freudenthal.H の数学化の理論による教材と授業の開発

㈠　Freudenthal.H の数学化の理論について

Freudenthal は、数学の本質は活動性にあるとして、その数学の活動性は数学化であるとした。Treffers,A.(1987)は、数学化を２つの方向性から水平的数学化と垂直的数学化に分類した。水平的数学化は現象や現実の問題を単純化や理想化、形式化するなどして数学の取り扱いができるようにすること、垂直的数学化は一般化や統合化、抽象化、体系化などの数学的に高度化することであり、この２つの数学化が連続して相互に行われることで数学の学習が深まっていくことを図４のように表し、累進的数学化であるとした。数学モデル化と数学化の２つの理論をもとに「３年　いろいろな関数」において教材開発と授業実践を行った。

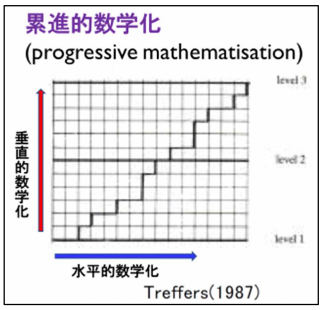
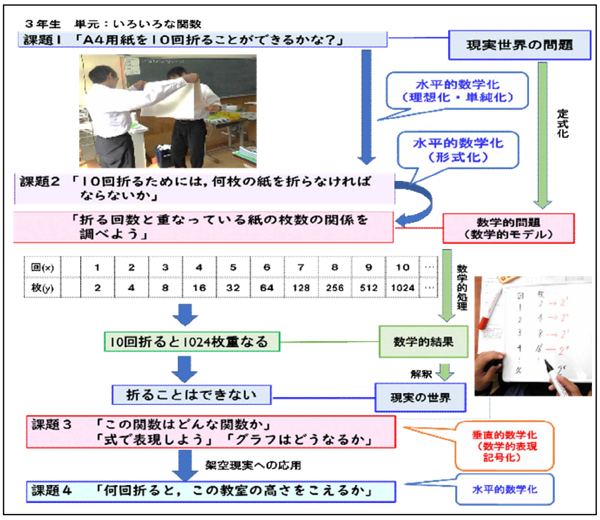


図４　累進的数学化

(ｲ)　いろいろな関数の授業デザインと実践

ａ　教材と授業デザイン



回(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
枚(y)	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	…

図５　開発した授業デザイン（３年　いろいろな関数）

図５のように水平的数学化をするための現実的事象として「A4 用紙を 10 回折ることができるか」という具体的に操作する問題を提示した。これを水平的数学化して「折る回数と重なっている紙の枚数の関係を調べる」という数学的問題に定式化した。回数と枚数の表を作成する数学的処理を行うと、「10 回折ると 1024 枚重なる」という数学的な結果が得られる。これは厚さが９センチ以上となり「折ることはできない」という現実の世界での解釈ができる。この後、関数を式やグラフという数学的な表現をもとに分析を行い、垂直的数学化を行った。さらに、架空現実を想定して課題を設定し、より高度な段階の水平的数学化を行うこととした。

ｂ　研究授業から得られた成果と課題の考察

水平的数学化だけでなく垂直的数学化を行ったことで、現実的事象を形式化し、その事象が新しい指数関数の関係式（$y=2^x$）やグラフで表現できることに生徒は数学的表現の奥深さを感じていた。また、数学は数学的記号や数学的表現を用いることで現実の物理的制約(紙は８回程度以上折れない)を超えて思考でき、架空現実の問題も解決できる（紙を 16 回折ると約６ｍの高さになり教室の高さをこえる）ことのおもしろさをほとんどの生徒に実感させることができた。

エ　動的幾何学習場の理論に基づく教材と授業の開発

(ｱ)　動的幾何学習場の理論について

動的幾何学習場とは、パソコンの図形シミュレーションソフトを活用した学習である。ドラッグ機能により、性質を保ったまま、図形を連続して変形できる。また、測定機能により、長さや角度を変形と同時に表示できるという特徴がある。この理論をもとに「２年　平行線と角」において教材開発と授業実践を行った。

(ｲ)　平行線と角の授業デザインと実践

ａ　教材と授業デザイン

「∠ａ、∠ｂ、∠ｃ にどのような関係が成立しているだろうか」と設定し、パソコンを操作をしながら図６のように３つのパターンで整理し分析を行った。文字式で関係を表すことで、３つの場合を統合化することとした。

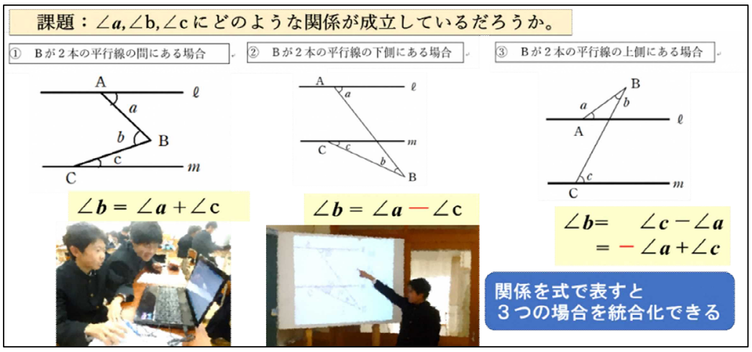


図６　開発した授業デザイン（２年　平行線と角）と授業の様子

ｂ　研究授業から得られた成果と課題の考察

図形シミュレーションソフトを活用したことで、連続的に点を動かしながら不変な性質を協働し対話的に探究させることができた。それをさらに式で表現することで統合化できる（点Ｂの位置によって∠ａ、∠ｃの＋－を変えれば同じ式で表すことができる）ことのおもしろさを実感させることができた。

オ　問題設定の理論による教材と授業の開発

(ｱ)　問題設定の理論について

ａ　What-If-Not ストラテジーについて

Brown&Walter は問題設定のストラテジー（方略）を考案している。それは、図７のような５つの水準

からなる。

第０水準は、出発点であり、これから探究しようとする問題や命題などを選択する水準である。

第Ⅰ水準は、属性を挙げる、つまり、問題や命題を構成する要素、状況を明らかにしていく水準である。ここでは、「自明なものや無関係、無意味と思われるものなども挙げておくことが価値ある研究を導きうる」と Brown は述べている。(Brown　1984)

【第０水準】出発点の選択
【第Ⅰ水準】属性目録づくり
【第Ⅱ水準】What-If-Not
【第Ⅲ水準】問題の設定
【第Ⅳ水準】問題の分析

図７　What-If-Not ストラテジー

第Ⅱ水準は、各属性に対して「そうでなければ、それはどうなるか」と問うことで、属性を変形していく水準である。

第Ⅲ水準は、新しい問題を設定するために、これらの新しい変形陳述を用いる水準である。

第Ⅳ水準は、新しい問題を選び、それらを分析し、それに解答を与える水準である。

b　「問題の発展的な扱いによる授業」について

竹内芳男・沢田利夫らは問題の発展的な扱いの段階を図８のように示している。(竹内・沢田　1984)

第１段階：原問題の解決
第２段階：問題づくり
第３段階：つくった問題の解決

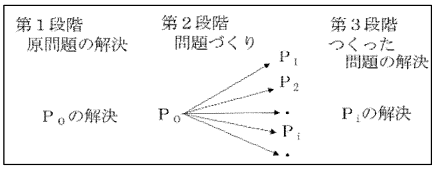


図８　発展的な扱いによる指導

第１段階は、原問題を提示し個別に独力で解決させる段階である。解決の過程をふりかえり、解決のためにどのようなアイデアを用いたのか明確にしておくことが要点である。

第２段階は、問題づくりの段階である。原問題をもとに生徒に新しい問題をつくらせる。できるだけ多様な問題をつくることを促す。

第３段階は、生徒のつくった多様な問題の中から、みんなで共通に解決する問題を選び、その解決にあたらせる。原問題との関連で、何が新しく知見として得られたのかを捉えさせる。

c　発展の２つの類型

片桐重男（1988）は、発展的な考え方には、次の２つの型が考えられると述べている。(片桐　1988)

発展Ⅰ型：条件変更による発展
発展Ⅱ型：観点変更による発展

発展Ⅰ型は、広い意味での問題の条件を変えてみることである。例えば、条件の一部を他のものにおきかえてみる、または条件をゆるめたり、問題の場面を変えてみたりすることなどである。

発展Ⅱ型は、思考の観点を変えてみることである。発展Ⅰ型と発展Ⅱ型との違いは、発展Ⅰ型は単に数値や形などを変えるだけに対し、発展Ⅱ型は前提となっている条件や構造を変更して見方を変えることである。

(ｲ)　反比例の授業デザインと実践

a　教材と授業デザイン

出発点を「面積が 18cm² となる長方形を並べるとどうなるか」とし、長方形を並べるという具体的操作から双曲線があらわれることを見出させる。その後、属性として並べているのは長方形であることを取り上げ、第Ⅱ水準の What-if-not 方略で長方形でなかったらと考えて、直角三角形や２辺の間の角と２辺の積が同じ（面積が同じ）三角形ではどうなるかという問題づくりをさせる。その後、問題を分析して面積の等しい直角三角形や三角形を並べても双曲線があらわれることを発見させるという授業構成にした。(図９)

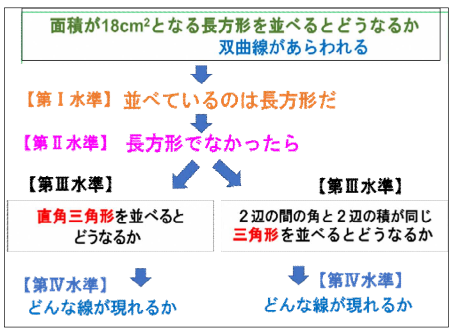


図９　開発した授業デザイン（１年　反比例）

b　研究授業から得られた成果と課題の考察

面積が一定である長方形を重ねて並べると双曲線が表れることは、教科書にも示されているが、What-If-Not ストラテジーを用いて課題を発展させると、並べる図形が長方形、直角三角形、三角形と変わっても双曲線があらわれるという数学的な美しさ、神秘性を味わわせることができた。この幾何学的な神秘性に生徒は感動していた。

(ｳ)　文字式の活用の授業デザインと実践

a　教材と授業デザイン

原問題を「カレンダーにおいて４つの数を正方形で囲んだとき、斜め２数の積の差はどうなるか」とし、「斜め２数の積の差は、いつも７になる」ことを文字式によって証明する。その後、「What-If-Not ストラテジー」の理論、「発展的考え方」の理論をもとに問題づくりをさせる。カレンダーを縦横に拡張して２次元の等差数列とみなすことを教師が提示し、観点変更を促す。増え方を変える問題をつくりだし、つくった問題を文字式で証明し、さらに一般に２次元の等差数列の２つの公差の積が斜め２数の積の差になることを文字式を使って一般化をはかる図 10 のような授業構成にした。

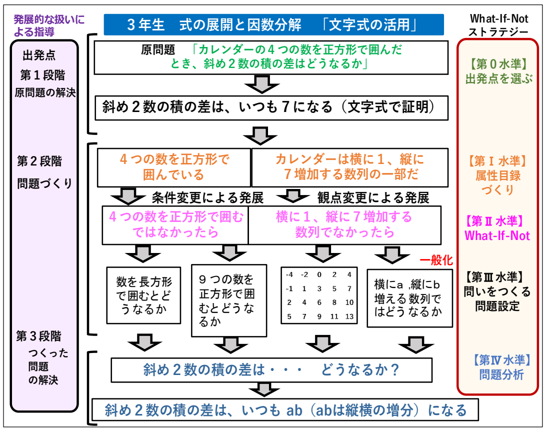


図 10　開発した授業デザイン（３年　文字式の活用）

b　研究授業から得られた成果と課題の考察

(a)　発展的扱いと模倣による論証指導の教育的有効性

原問題の性質を具体的数値で発見し、その文字式による証明については、教師の主導で行った。原問題を発展させてつくった問題の解決および文字式による証明は、原問題の解決を模倣しながら生徒が主体的に行うように授業をデザインした。証明が苦手で自分一人では書くことができない生徒も原問題の証明を模倣することによって、意欲的に取り組み、ほとんどの生徒が自分で証明を完成させることができていた。このように問題の発展的扱いに原問題の証明方法を模倣させることを組み合わせた授業展開は、論証指導に有効であることが実証された。

(b)　問題分析の道具としての証明の役割

発展的扱いの第３段階、What-If-Not の第Ⅳ水準で斜め２数の積の差が、縦横の増分の積になっていることの理由を探究する場面において、文字式の証明を振り返り、「計算過程をみて、６はどこからでてきているか」と問い、「定数項の２×３＝６からだ」と気づかせた。つまり、文字式の証明の計算過程の中に根拠を発見させた。このように文字式の証明は、論理的な理由付けに役立つだけではなく、問題分析の道具としても有効であることを理解させることができた。証明のこのような役割について、他の教材やその証明について今後とも分析し、その指導を考えていきたい。

(ｴ)　１次関数の応用の授業デザインと実践

a　教材と授業デザイン

原問題は、「Ｐから１回はね返ってＣに入るとき、はね返る点Ｑの位置を求める」とした。原問題の属性を挙げさせ、線対称の長方形をつくることで玉の動きを一直線で表すことができることを透明モデル等を活用して示した。その後、What-If-Not と考え、問題づくりを行う。玉の動きは、長方形をしきつめた図をつくり、対応する角にむけて直線を引くことで表すことができること、長方形をしきつめた図の辺と直線の交点が、はね返る位置に対応していることを理解させることを第一目標に、さらに、点Ｑの位置を１次関数のグラフを用いて求めることを最終目標とする図 11 のような構成にした。

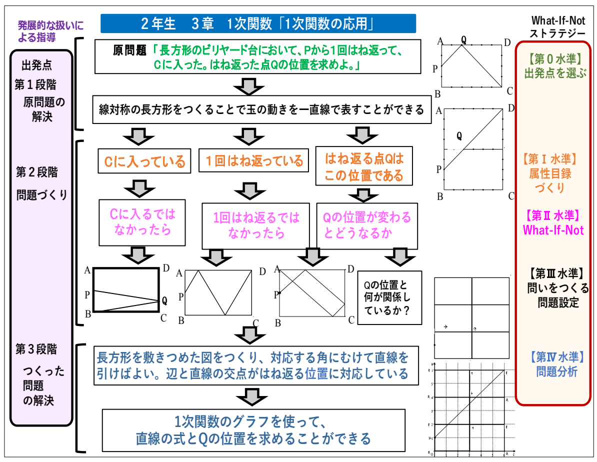


図 11　開発した授業デザイン（２年　１次関数の応用）

b　研究授業から得られた成果と課題の考察

(a)　教材の発展性

本研究では２年生対象で１単位時間に授業デザインしたが、３年生対象であれば、第３段階・第Ⅳ水準において１次関数だけでなく、既習事項の相似を用いて点Ｑの位置を求めることもできる。また、玉の動きによってできた直角三角形がどれも相似であることから、図的な美しさを感得させることもできる。さらに、複数単位時間での授業構成であれば問題づくりで命題を発展させることでみえてくる点Ｑの位置の規則的変化についても探究させることができる。以上のことからも本教材は数学的に豊かな発展性のある内容であるといえる。

(b)　数学的見方・考え方の育成

授業後の生徒の感想では、「はね返る回数や位置が変わったときにどうなるか知りたい」という意見が多かった。このように生徒から問いが出てきたことは、次の数学化を生むことになり、自立的に深い学びにつながっているという点からも重要な成果であると考えている。また、その中でも数学が苦手な生徒から「玉が入るときの規則性について調べてみたい」という数学的に価値の高い考え方が示された。このように本教材の数学的核心に係る見方・考え方を引き出すことができたことは大きな成果であると考えている。

(4)　学習理論に基づいた授業デザインの有効性についてアンケート調査による検証

ア　数学観に関するアンケートの調査による有効性の検証について

開発した数学観に関するアンケート調査を使い、実践した研究授業によって数学観がどのように変容したのか分析した。

数学的モデル化の理論による研究授業の実践前後では、表５のように実用性・キャリア教育としての有用性の項目に有意な差がみられた。これは、数学の現実的な有用性を生徒に実感させることができたことがあらわれていると考えられる。

表５　数学観に関する調査結果（実用性・キャリア教育としての有用性）

数学観に関する調査　（対象：2年生　23名）

観点		質問内容	2018年6月 平均値	2018年6月 標準偏差	2018年7月 平均値	2018年7月 標準偏差	t値
実用性・キャリア教育としての有用性	M31	私は数学を必要とする仕事をしたいと思います	2.50	1.012	2.95	.899	2.89**
	M32	数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考える	2.95	.844	3.14	.774	1.28
	M33	数学の授業で学習したことは，将来，社会に出たときに役に立つ	3.59	.590	3.77	.429	1.45

*:p<.05, **:p<.01

また、一連の学習理論に基づいた研究授業の実践前後で行った調査では、表６、７のように精神陶冶性の項目に有意差がみられた。数学化や問題設定の体験を通して、「理由をもとにすじみちを立てて考えることができるようになる」「いろいろな考えを思いつくようになる」というような数学的見方・考え方を高めることができたと考えられる。さらに、問題を解く態度の項目の「諦めずにいろいろな方法を考える」に有意差がみられ、問題解決の忍耐力も向上させることができたと考えられる。

表６　数学観に関する調査結果２０１８年度

数学観に関する調査　（対象：全校生徒76名,実施：72名）

観点		質問内容	2018年6月 平均値	2018年6月 標準偏差	2018年11月 平均値	2018年11月 標準偏差	t値
精神陶冶性	M21	数学を勉強すると，理由をもとにすじみちを立てて考えることができるようになります	3.22	.736	3.39	.683	1.69
	M22	数学を勉強すると，いろいろな考えを思いつくようになります	3.25	.746	3.46	.691	2.56*
	M23	数学を勉強すると，頭の回転が速くなります	3.31	.799	3.47	.731	2.04*
問題を解く態度	M41	数学の問題の解き方がわからないときは，諦めずにいろいろな方法を考える	3.25	.707	3.40	.664	1.56
	M42	数学の授業で問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考える	3.15	.867	3.35	.715	2.07*
	M43	数学の授業で公式やきまりを習うとき，その理由を理解するようにしている	3.29	.721	3.46	.649	1.79

*:p<.05, **:p<.01

表７　数学観に関する調査結果２０１９年度

数学観に関する調査（実施対象:２・３年生42名）

観点		質問内容	2019年6月 平均値	2019年6月 標準偏差	2019年11月 平均値	2019年11月 標準偏差	t値
価値観・有用性	M11	数学の勉強は好きだ	2.76	1.019	3.02	.821	2.42*
	M32	数学の授業で学習したことは、普段の生活の中で活用できる	3.02	.987	3.24	.699	1.71
	M33	数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ	3.20	.928	3.39	.703	1.48
精神陶冶性	M21	数学を勉強すると、理由をもとにすじみちを立てて考えることができるようになる	2.90	.889	3.27	.742	2.56*
	M24	数学を勉強すると、新しい見方や考え方が身に付くようになる	3.59	.631	3.46	.552	1.40
	M25	数学を勉強すると、物事を考えることが速くなる	3.24	.799	3.34	.762	0.75

*:p<.05, **:p<.01

イ　数学のおもしろさに関するアンケートの調査による有効性の検証について

開発した数学のおもしろさに関するアンケート調査を使い、実践した研究授業によって数学に対するおもしろさの対象や内容がどのように変容したのか分析した。

問題設定の理論による授業デザインによる研究授業の実践前後では、表８、９のように創造性・発見性の項目に有意な差がみられた。これは、数学的性質を発見したり探究したりすることに対する興味関心を育成できたことが表れていると考えられる。また、数学に取り組む意欲の項目で「やさしい問題よりも難

しい問題にチャレンジしているとき」に有意差がみられた。これは、探究の意欲の高まりが、チャレンジ精神の向上につながったのではないかと考えられる。

表８　数学のおもしろさに関する調査結果（３年生）

数学のおもしろさに関する調査　（対象：３年生24名）

観点		質問内容	2019年6月 平均値	2019年6月 標準偏差	2019年7月 平均値	2019年7月 標準偏差	t値
創造性・発見性	A21	自分の考え出したことが、問題を解決するのに役立つとき	3.70	.470	3.88	.338	2.46*
	A22	習った事柄によって、さらに新しいことがわかったとき	3.26	.752	3.75	.532	3.41**
	A23	自分で新しい問題を作るとき	2.83	1.029	3.33	.761	2.77*
	A24	自分の解き方とは別の解き方や考え方が見つかったとき	3.09	.793	3.54	.779	3.11**

*:p<.05, **:p<.01

表９　数学のおもしろさに関する調査結果（２年生）

数学のおもしろさに関する調査　（対象：２年生20名）

観点		質問内容	2019年6月 平均値	2019年6月 標準偏差	2019年11月 平均値	2019年11月 標準偏差	t値
創造性・発見性	A22	習った事柄によって、さらに新しいことがわかったとき	2.90	.831	3.42	.692	2.79*
	A23	自分で新しい問題を作るとき	2.48	.928	2.89	.658	2.28*
数学に取り組む意欲	A32	やさしい問題よりも、難しい問題にチャレンジしているとき	2.29	.784	2.89	.875	2.74*

*:p<.05, **:p<.01

４　まとめ

(1)　深い学びと学習指導法としての「What-If-Not ストラテジー理論」

問題の条件変更や観点変更などを行うような問題設定・問題づくりをさせることによって、主体的な学びを促し、問題を成立させている状況や構造などを意識したり、再認識するような授業が実践可能であることがわかった。このことは、数学の問題における基本となる見方・考え方を働かせることであり、それは一般化や統合化、つまり、深い学びであるといえる。このように問題設定は、深い学びの契機として有効であることが実証できた。また、問題設定は、領域や単元が限定されず、いろいろな場面で活用でき、汎用性が高いことがわかった。さらに、What-If-Not ストラテジーの理論は、教材開発と授業デザインに有効であるだけではなく、「～でなければどうなるか」と生徒に問うことで、生徒に探究の仕方を学ばせることにもつながり、問題をつくるための具体的な発問の方法などの指導法においても重要な指針を与えてくれた。しかし、問題づくりをさせるための発問について、具体的な方向性を示さないと意見を引き出せないが、方向性を与えすぎると考えや思考を制限してしまうことになるため、どこまで自由度を持たせるのか、また生徒の思考過程を意識してどのように発問を設計していくのか、さらに発問の組織化・構造化については今後の課題である。

(2)　問題設定の理論と実践のずれ

授業実践において、問題づくりをさせた際、生徒からは変える属性としてさまざまな意見が挙げられた。しかし、実践上、扱う問題をそのうちの１つに絞らざるを得なかった。問題設定に対して生徒に意義を持たせたいが、つくった問題をすべて取り上げて評価することができないという現実的な問題点がある。授業で取り上げられない問題を授業外にレポートで提出させ、生徒相互で解き合うなどの方法も考えられるが、いずれにせよどのように活用し評価するかは、今後の課題である。

また、「What-If-Not ストラテジーの理論」では、第Ⅰ水準から第Ⅲ水準へと進む。つまり、まず属性の列挙のみを行い、その後「～でなければどうか」と属性を変更して問題を再設定するように設定されているが、実際には、問題づくりと属性に気付くことは同時に起こったり、第Ⅱ水準と第Ⅲ水準を行き来したりしながら生徒は新しい問題づくりを行っていた。段階的に問題づくりをさせることが、問題設定に有効なのかさらに検討が必要である。

＜引用・参考文献＞

片桐重男(1988).『数学的な考え方の具体化』明治図書
竹内芳男，沢田利夫 (1984),『問題から問題へ－問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善－』. 東洋館出版社
中原忠男・中野俊幸他(1994).「数学に対する生徒の信念・目的・態度の基礎研究（Ⅰ）－質問紙の作成と基礎統計的分析－」，広島大学教育学部　学部・附属研究紀要.第 23 号
三輪辰郎(1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」，筑波数学教育研究. ２号
Freudenthal, H.(1991).『REVISITING MATHEMATICS EDUCATION』.Kluwer.A.P
Treffers, A.(1987), THREE DIMENTIONS A model of Goal and Theory Description. in Mathematics Instruction-The Wiskobas Project, D.Reidel Pub.
Brown, S.I. & Walter.M.I, 平林一栄 監訳(1990),『いかにして問題をつくるか－問題設定の技術－』，東洋館出版
Paul Cobb, et.al (1991) . “Assessment of a Problem -Centered Second-Grade Mathematics Project”
JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, January1991, vol.22, no.1