高等学校における多様な進路希望の実現に関する研究

－「数学化」に焦点を当てた分析及び指導の在り方に関する一考察－

高知県立高知工業高等学校　教諭　金岡　展弘
高知県教育センター　指導主事　山本　周史
高知県教育委員会事務局高等学校課　指導主事　川久保　広臣

本研究は、「算数・数学の問題発見・解決の過程」の中の「日常生活や社会の事象の数学化」に焦点を当て、調査問題に対して生徒が行った「現実の世界の数学化」を「視覚的手段」と「数学的手段」の二つの軸で分類することによって、生徒のもつ「現実の世界の数学化」の課題の傾向を見いだし、授業における教師の指導の在り方について考察することを目的としている。２回の調査問題を実施し、分類・分析を行った結果、図を描くことを生徒に意識づけすることや、与えられた条件を全て満たした図になっているかどうかを生徒に吟味させること、抽象的な文字を使って表現することのよさとその有効性を伝えることが、教師の指導の在り方として重要であることが示唆された。

＜キーワード＞　日常生活や社会の事象の数学化、視覚的手段、数学的手段、抽象化

1　研究目的

(1) 高知県の現状

高知県教育委員会事務局高等学校課は学力向上推進事業の一環として、県立高等学校全日制及び多部制単位制（昼間部）の生徒を対象に、文部科学省より「高校生のための学びの基礎診断」の認定を受けた、ベネッセコーポレーションの３種類の学力定着把握検査を実施している。県立高等学校全日制と多部制単位制（昼間部）のうち、１校は「総合学力テスト」、６校は「スタディーサポート」、29 校（分校２校を含む）は「基礎力診断テスト」を受検している（１校は学科により異なる検査を受検しているため、重複してカウントしている)。基礎力診断テストは、基礎学力の知識・技能を測定するマーク式問題と、思考力・判断力・表現力を測定する記述式問題の二つによって構成されたテストである。記述式問題では、日常の中で起こる事象から必要な情報を読み取って思考し、結論だけでなく考え方を言葉や数式によって説明することも求めている。ベネッセコーポレーションの定める学力指標により､マーク式問題の結果は教科別及び三教科総合で学習到達ゾーン(以下、「GTZ」という）によって、記述式問題の結果は教科ごとにランクによって、それぞれ評価される。マーク式問題による GTZ と各進路における目安を表１に、数学記述式問題のランクを表２に示す。記述式問題のランクは、各教科の GTZ と対応するように設定されていて、記述式問題のランクは、GTZ と一致すること、もしくは上回ることが望ましいとされている。

表１　マーク式問題による GTZ と各進路における目安（ベネッセ）

GTZ		進学の目安	就職の目安
Aゾーン	A２ A３	４年制大学一般入試で合格がめざせる。	公務員試験（高卒程度）で合格がめざせる。 学力を重視する企業や競争率の高い企業への合格がめざせる。
Bゾーン	B１ B２ B３		
Cゾーン	C１ C２ C３	４年制大学推薦入試で合格がめざせる。	一般的な入社試験（筆記）で合格がめざせる。 資格取得に合格するための基礎学力が身についている。
Dゾーン	D１ D２	短期大学・専門学校の合格がめざせる。	就職後に仕事に取り組む上で最低限の学力が身についている。
	D３	希望が実現できなかったり、進学後に授業についていけなかったりする可能性が高い。	希望が実現できなかったり、就職後に仕事についていけなかったりする可能性が高い。

表２　数学記述式問題のランク（ベネッセ）

ランク	ランク定義
A	与えられた文章やグラフ、表などから適切に情報を抽出し、問題に対する結論と理由を、数学的表現を用いて説明することができる。
B	与えられた情報をもとに、数式を用いて問題に対する自分の考えを述べることができる。
C	与えられた情報をもとに数学的性質を見出し、問題を定理や公式、計算などを用いて解決することができる。
Ｄ１－Ｄ２	数学の基本的な問題を、定理や公式、計算などを用いて解決することができる。
Ｄ３	数学の基本的な問題を解決することに課題がある。まずは公式や計算法則を理解し、教科書の例題を解けるようにしたい。

第２期高知県教育振興基本計画（第３次改訂版）では、知の分野の目標として、基礎力診断テストを受検する 29 校全体において、３教科総合の GTZ がＤ３の生徒の割合を、高校３年生４月段階で 15%以下にすることを掲げていた。令和２年度の高校３年生に占めるＤ３層の割合は、高校２年生９月段階では 15.9%であったのに対し、高校３年生６月段階（令和２年度に限り４月実施予定のテストを６月に実施）では 23.5%であり、7.6 ポイント増え、目標値を 8.5 ポイント上回っている。Ｄ３層の割合を教科別に見ると、国語は２年生９月の 7.3%に対して３年生６月では 9.5%で 2.2 ポイントの増加、数学は２年生９月の 8.8%に対して３年生６月では 23.1%で 14.3 ポイントの増加、英語は２年生９月の 13.7%に対して３年生６月では 11.3%で 2.4 ポイントの減少であり、Ｄ３層の割合が 15%を超えているのは数学だけであった。

表３は、令和２年６月に基礎力診断テストを受検した高知県の高校２年生の数学における GTZ、ランクの割合を表したものであり、表４は同じく高校３年生の GTZ、ランクの割合を表したものである。記述式問題の評価においてＤランクとされた生徒の割合が、高校２年生では 50%を超え、高校３年生では約 40%という結果であった。また、高校２年生で記述式問題のランクが GTZ を上回った生徒は 21.4%、GTZ と同じだった生徒は 45.9%、GTZ を下回った生徒は 32.7%であった。高校３年生では記述式問題のランクが GTZ を上回った生徒は 42.6%、GTZ と同じだった生徒は 34.2%、GTZ を下回った生徒は 23.2%であった。

表３　数学における GTZ とランクの割合（高校２年生）

マーク式問題			記述式問題	
学習到達ゾーン		割合	割合	ランク
Ａゾーン	Ａ２ Ａ３	2.9%	6.3%	A
Ｂゾーン	Ｂ１ Ｂ２ Ｂ３	18.4%	9.0%	B
Ｃゾーン	Ｃ１ Ｃ２ Ｃ３	33.9%	31.8%	C
Ｄゾーン	Ｄ１ Ｄ２	34.9%	40.4%	Ｄ１－Ｄ２
	Ｄ３	9.9%	12.5%	Ｄ３

表４　数学における GTZ とランクの割合（高校３年生）

マーク式問題			記述式問題	
学習到達ゾーン		割合	割合	ランク
Ａゾーン	Ａ２ Ａ３	2.4%	10.4%	A
Ｂゾーン	Ｂ１ Ｂ２ Ｂ３	16.2%	13.9%	B
Ｃゾーン	Ｃ１ Ｃ２ Ｃ３	31.8%	35.6%	C
Ｄゾーン	Ｄ１ Ｄ２	26.5%	26.9%	Ｄ１－Ｄ２
	Ｄ３	23.1%	13.2%	Ｄ３

これらのことから、高知県の目標を達成するうえで、２年次から３年次に進級する際の数学における GTZ の下降者の増加と、記述式問題に対する弱さが大きな課題となっていることが分かる。Ｄ３層の生徒は進学や就職試験で苦戦すること、進学・就職しても、学業や業務に支障をきたす可能性が高いということを考えると、生徒の進路希望の実現のためには、数学においてＤ３層の生徒を減少させることが非常に重要である。

(2) 数学的活動における数学化

高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編（以下、「解説」という）において、学習者に求められる数学的活動は、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」とされている。これは、「算数・数学の問題発見・解決の過程」として図１のように示されている。

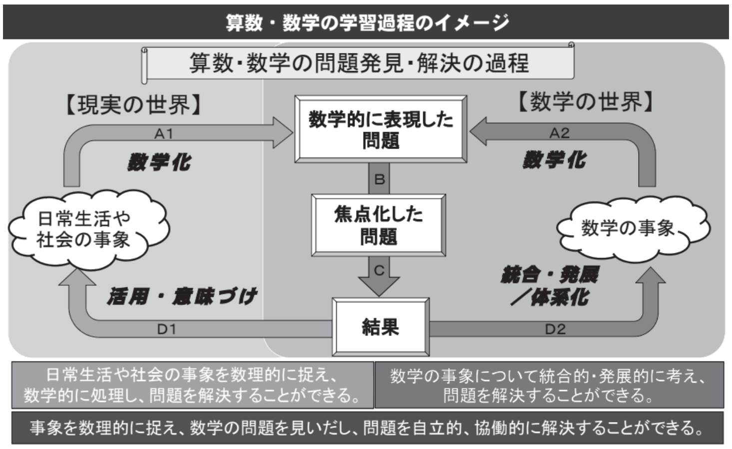


図１　算数・数学の問題発見・解決の過程

解説によれば、「現実世界の事象を考察する際に、目的に応じて必要な観点をもち、その観点から事象を理想化したり抽象化したりして、事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して数学の舞台にのせて考察しようとすること」が重要であるとされ、この現実の世界と数学の世界をつなぐ過程は、図１において「日常生活や社会の事象の数学化」（Ａ１）として示されている。

「報告　大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準数理科学分野」（日本学術会議、2013）（以下、「報告」という）では、数理科学を使って現実世界の問題を解くために最初に行うのは、「与えられた問題を分析し、複雑な現象において何が必要かを考え、不必要な物を切り捨てた数理科学的に取り扱えるモデルを作り、問題を定式化し、与えられた条件などを明確にした上で、問題解決のための方針を立てる」ことであり、「このためには、問題を解くために必要な構造を見抜くことが必要となり、対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部分を単純化・抽象化することが必要になる」としている。「問題を解くために必要な構造を見抜くこと」は、図１のＡ１における「現実世界の事象を考察する際に、目的に応じて必要な観点をもつこと」に当たる。また、「対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部分を単純化・抽象化すること」は、同じくＡ１における「その観点から事象を理想化したり抽象化したりすること」に当たる。

GTZの上昇を促す要因として、西村ら（2018）は、「日々の授業の中で学習の有用性をもたせること」を挙げている。また、中越ら（2019）は、生徒の「学びに向かう力・人間性等」の育成を目指した授業改善のための視点の一つとして、「『現実の世界』と『数学の世界』の往還」を挙げている。そこで、本研究では、「算数・数学の問題発見・解決の過程」の中の「日常生活や社会の事象の数学化」（以下、「現実の世界の数学化」という）を、報告で示された「問題を解くために必要な構造を見抜くこと」及び「対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部分を単純化・抽象化すること」と定義し、そこに焦点を当てることとした。そして、生徒がこの過程を遂行するうえでの課題を明らかにし、授業における教師の指導の在り方についての示唆を得ることを目的としている。小学１年生から12年間にわたって算数・数学教育を受けてきた高校３年生が行う「現実の世界の数学化」の過程を、調査問題の解答内容から読み取り、それを分類することによって、生徒の「現実の世界の数学化」における課題を見いだし、必要な教師の指導の在り方を考察することが可能になるのではないかと考えた。

2　研究仮説

高等学校数学において、生徒が行う「現実の世界の数学化」を分類表を使って分類することによって、生徒のもつ「現実の世界の数学化」の課題の傾向を見いだし、授業における教師の指導の在り方についての示唆を得ることができるだろう。

３　研究方法

二つの調査問題を作成し、高校生の「現実の世界の数学化」の力を測る。生徒の行う「現実の世界の数学化」の過程は、三輪（1983）によって提示された、図やことばなどによる「視覚的手段」と数や式などによる「数学的手段」の二つの軸で分類する。「視覚的手段」は、「現実の世界の数学化」の定義における「対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象し、本質的な部分を単純化・抽象化すること」に、「数学的手段」は、「現実の世界の数学化」の定義における「問題を解くために必要な構造を見抜くこと」にそれぞれ対応するものと考え、そこに評価の観点を置くこととする。

(1) 調査問題

調査問題の対象は高校３年生とした。２回の調査問題の内容は、必履修科目である数学Ⅰの二次関数の分野で学習済みの二次関数の最大値を求めるものとした。

調査問題における課題の提示は、現実の事象により近づけるため、問題文による説明と状況を示す写真の提示によって行う。問題文には課題の解決には関係のない情報も含まれており、生徒はそれらを吟味し、問題を解決するうえで必要かどうかを判断しなければならない。また、問題を解くために設定された従来の数学の問題文と同様の表現にならないように、できる限り数学用語の使用を避け、日常的によく用いられる言葉を選んでいる。調査問題の作成にあたっては、研究者らに加えて、数学を専門としない指導主事からの意見も取り入れた。解答用紙は、生徒の考えた内容をできるだけ見取るために、一度書き込んだ内容は間違ったと思っても消しゴムで消さずに、══や×などの印を使って訂正するように指示をした。また、解答の正誤を判定するために、考え方を記入する欄とは別に解答を記入する欄を設けた。さらに、問題を解いた後に生徒が感想を記入する欄も設けた。

ア　１回目の調査問題

問題 　河川公園の中に、子供が小動物と触れ合える「どうぶつ広場」をつくることになりました。「どうぶつ広場」をつくる予定の場所は、川に面した、南北 12m、東西 80m の広い草地です。「どうぶつ広場」では、動物が逃げ出さないように、高さ 65 ㎝、長さ 10m の金網を使って、３か所を直角に曲げ、隙間ができないようにして、囲いをつくります。動物を入れる囲いは、できるだけ広くつくりたいと思っています。このとき、動物を入れる囲いは、どのような大きさになりますか。

公園や使用する金網、支柱、金網の曲げ方を写真で提示する。公園の写真では方位を併せて示すことによって、南北 12m、東西 80mの広い草地を想像できるようにする。金網の写真では高さ 65cm、長さ 10mのイメージをつかませるとともに、実際に金網を直角に曲げた写真も示す。これらの写真は拡大して黒板に掲示する。

この問題における「視覚的手段」の中心的な内容は、生徒が問題文と写真から草地の中につくられた囲いの様子をイメージし、「周囲が全て長さ 10m の金網で囲われた長方形の囲い」であることに気付くことである。また、「数学的手段」の中心的な内容は、生徒が「面積（または体積）がより大きな囲いのつくり方を見つける問題」と見抜くことである。

イ　２回目の調査問題

問題 　家の西側のフェンスに接するようにして、長方形の畑を作ることにしました。西側のフェンスは高さ１m30cm、長さ 12mで、家とフェンスの間は４mあいています。また、西側のフェンスの北端の隅と南端の隅には直径１mの丸い花壇があるため、畑はその花壇を避けて作らなければなりません。畑は、動物が入らないように、高さ１m、長さ 12mの金網で囲います。この金網を使ってできるだけ広い畑を作ろうとすると、畑の大きさはどのようになりますか。

家とフェンスの間、花壇、使用する金網と支柱を写真で提示する。家とフェンスの間、花壇の

写真を示すことによって、畑を作る場所を想像できるようにする。金網の写真では高さ１m、長さ12mのイメージをつかませる。１回目の調査と同様に、これらの写真も拡大して黒板に掲示する。

この問題における「視覚的手段」の中心的な内容は、生徒が問題文と写真から家やフェンス、花壇、畑の位置関係をイメージし、「西側のフェンスを１辺とし、残りの３辺を長さ12mの金網で囲われた長方形の囲い」であることに気付くことである。また、「数学的手段」の中心的な内容は、生徒が「面積（または体積）がより大きな囲いのつくり方を見つける問題」と見抜くことである。

(2) 解答の模範例

平成29年に告示された小学校学習指導要領解説算数編では、「関数の考え」は「事象の変化を捉えて問題解決に生かす資質・能力の中核となる」とし、平成29年に告示された中学校学習指導要領では、中学校数学科の内容の骨子の中の「関数」において、「関数は、動的な対象を考察する際に用いられる抽象的な概念であり、数学の世界はもとより、現実の世界の事象における伴って変わる二つの数量の関係を捉える場面においても有効に機能する」と述べている。これらのことを踏まえて、２回の調査問題の解法の模範例の検討を行った。調査対象となる高校３年生は、小学校では「関数の考え」を、中学校では「関数」を学習しており、高等学校においては、数学Ⅰの二次関数の分野で、二次関数の値の変化やグラフの特徴を理解し、最大値や最小値を求める知識や技能を有していると考えられる。数学担当の指導主事や教諭が作成した解法も参考にし、解答の模範例を「与えられた条件を図などに表現することで整理し、変化する二つの数量の関係の中で最大値を求める問題であることを見抜いて、動的な対象の考察において有効な関数を用いること」とした。

(3) 分類表

「視覚的手段」の評価は、対象の本質的な部分を単純化・抽象化できているかどうかという観点で行うこととし、その分類基準について検討した。

片桐（2014）によると、「単純化の考え方」の一つに、「条件のいくつかを簡単なものに置き直して考えようとする考え方」があるという。同じく片桐は「抽象化の考え方」とは、「いくつかのものに共通な性質を引き出そうとする考え方が抽象化の考え方で、それと表裏の関係にあるものに捨象しようとする考え方がある。また、具体化の考え方をするのも、結局は事柄を抽象しようとするためであるから、第二のものとして、これを抽象化の考え方に含めていくのがよい。いろいろな条件が一定であるような理想的な状態を考える。または、条件や性質が数学的な定義や原理・法則の条件を満たしているような理想的な場合を考えることによって、事態が明確になることが多いが、このような理想的な状態を考えようとするのを理想化の考え方という。これを抽象化の考え方の第三のものとする。第四に、条件を明確にしようとする考え方が抽象にとって必要である。」としている。

これを参考にして、単純化は、図を描いて表現することと捉え、「視覚的手段」の第一の段階とした。次に、抽象化は、問題文にある条件を明確にしようとする「条件の明確化の考え方」、そこに具体的な数の組み合わせを加えて表現する「具体化の考え方」、抽象化された文字や式、言葉を加えて表現する「抽象化の考え方」の順に進むと考えた。そして、具体的な数の組み合わせまたは抽象化された文字や式、言葉が条件を満たすか否かを加えて、X0～X5の６段階に分類した（表５）。

なお、今回作成した調査問題では、対象が持つ様々な性質のうちの非本質的部分を捨象することに関しては、生徒が囲いの大きさを面積と捉えるか、体積と捉えるかで金網の高さを捨象できるかどうかが違ってくることや、囲いの大きさを面積と考え金網の高さを描いていた場合でも、図を描いた後に高さを捨象して面積を求めることができていれば、捨象に関する気付きが早いか遅いかだけの問題で優位性があるとはいえないことから、分類基準には含めないこととした。これ以降、生徒が囲いを平面的に捉えた面積だけでなく、立体的に捉えて体積を求めている場合にも、同じく「面積」と表記することとする。

表５　「視覚的手段」分類表

段階	分類基準
X5	与えられた条件が全て正しく明確化された図に、条件を満たす抽象化された文字や式、言葉を加えて表現している。
X4	与えられた条件が全て正しく明確化された図に、条件を満たす具体的な数の組み合わせを加えて表現している。
X3	与えられた条件が全て正しく明確化された図に、抽象化された文字や式、言葉を加えて表現しているが、そこに誤りがある。
X2	与えられた条件が全て正しく明確化された図に、具体的な数の組み合わせを加えて表現しているが、そこに誤りがある。
X1	対象の本質的な部分を単純化して図で表現しているが、与えられた条件が全て正しく明確化された図になっていない。
X0	対象の本質的な部分を単純化して図で表現していない。

次に、「数学的手段」の評価は、問題を解くために必要な構造を見抜くことができているかどうかという観点で行うこととし、その分類基準について検討した。この調査問題では、問題を解くために必要な構造は、面積がより大きな囲いのつくり方を見つけることであるから、面積をどのように比較・検討しているかということに基づいて Y1～Y5 の５段階に分類した（表６）。問題を解く構造を見抜けず「面積を求めていない段階」を Y1、「具体的な数値で面積を計算しているものの、それが最大であることの根拠を示していない段階」を Y2、「より面積が大きい囲いのつくり方を探そうとして、具体的な数値で面積を何通りか計算している段階」を Y3、「辺の長さと面積に着目して、両者の関係を考察するうえで有効な関数の式で表現しているが、そこに誤りを含む段階」を Y4、「辺の長さと面積に着目して、関数の式で正しく表現している段階」を Y5 としている。

表６　「数学的手段」分類表

段階	分類基準
Y5	辺の長さと面積の関係に着目し、二次関数として正しく表現している。
Y4	辺の長さと面積の関係に着目し、二次関数として表現しているが、誤りがある。
Y3	二通り以上の具体的な数値で面積を計算している。
Y2	一通りの具体的な数値で面積を計算している。
Y1	面積を計算していない。

(4) 調査の実施・分析・考察

ア　調査問題の実施

調査時期：令和２年11月～12月

調査対象：高知県立Ａ高等学校　第３学年　260 名

調査方法：・調査問題（２回）の実施（11月６日～11月19日）

・インタビュー調査の実施（12月15日～12月18日）

イ　調査結果の分析・考察

分析方法：二つの軸「視覚的手段」と「数学的手段」による分類及びそれらの相関による分析と、「視覚的手段」における X1 の図の分析、インタビュー調査の分析

４　結果と考察

(1) 二つの軸による分類の分析

１回目、２回目の調査問題の二つの軸による分類結果は、それぞれ表７と表８のようになった。なお、調査人数は、それぞれ欠席者を除いた 258 名、253 名であった。

表７　１回目の調査結果

視覚的手段	人数(人)	割合(%)	正答(人)	正答率*(%)
X5	3	1.2	3	100.0
X4	81	31.4	41	50.6
X3	1	0.4	0	0.0
X2	3	1.2	0	0.0
X1	115	44.5	0	0.0
X0	55	21.3	6	10.9
数学的手段	人数(人)	割合(%)	正答(人)	正答率*(%)
Y5	1	0.4	1	100.0
Y4	0	0.0		
Y3	20	7.7	9	45.0
Y2	83	32.2	31	37.3
Y1	154	59.7	9	5.8

表８　２回目の調査結果

視覚的手段	人数(人)	割合(%)	正答(人)	正答率*(%)
X5	1	0.4	1	100.0
X4	59	23.3	30	50.8
X3	0	0.0		
X2	1	0.4	0	0.0
X1	159	62.9	1	0.6
X0	33	13.0	1	3.0
数学的手段	人数(人)	割合(%)	正答(人)	正答率*(%)
Y5	0	0.0		
Y4	2	0.8	0	0.0
Y3	62	24.5	18	29.0
Y2	110	43.5	11	10.0
Y1	79	31.2	4	5.1

*各軸における、それぞれの段階の人数を母数としたときの割合

表７、表８によれば、X5（与えられた条件が全て正しく明確化された図に、条件を満たす抽象化された文字や式、言葉を加えて表現している）の段階の生徒の方が、X4（与えられた条件が正しく明確化された図に、条件を満たす具体的な数の組み合わせを加えて表現している）の段階の生徒より正答率が高いことが分かる。また、面積がより大きい囲いを見つける手段として、面積を二次関数で表現した Y4、Y5 の段階の生徒は極めて少ないことや、Y1（面積を計算していない）、Y2（一通りの具体的な数値で面積を計算している）、Y3（二通り以上の具体的な数値で面積を計算している）の段階において、高い段階にある層ほど、正答率が高くなっていることも分かる。

(2) 相関による分析

１回目と２回目における「視覚的手段」と「数学的手段」の相関をみるため、各領域の人数とその領域内での正答者率を示したものが表９、表 10 である。該当者がいない領域は空欄にしている。

表９　１回目の調査結果
「視覚的手段」と「数学的手段」の相関
各領域の人数と領域内での正答者率

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
X5		2 100.0%			1 100.0%
X4	27 29.6%	43 58.1%	11 72.7%		
X3	1 0.0%				
X2	3 0.0%				
X1	80 0.0%	28 0.0%	7 0.0%		
X0	43 2.3%	10 40.0%	2 50.0%		

表 10　２回目の調査結果
「視覚的手段」と「数学的手段」の相関
各領域の人数と領域内での正答者率

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
X5			1 100.0%		
X4	10 40.0%	27 37.0%	22 72.7%		
X3					
X2	1 0.0%				
X1	51 0.0%	70 1.4%	36 0.0%	2 0.0%	
X0	17 0.0%	13 0.0%	3 33.3%		

表９、表 10 によれば、X5（与えられた条件が全て正しく明確化された図に、条件を満たす抽象化された文字や式、言葉を加えて表現している）の段階の生徒は、１回目の調査と２回目の調査を併せて４名であった。そのうちの１名は、Y5（面積を二次関数として正しく表現している）の段階であり、模範例で示した問題解決に近い解答であった。一方で、図には文字等を用いて表現しているにも関わらず、Y2、Y3（具体的な数値で面積を計算している）の段階の生徒もいたが、いずれの場合も解答は正解であった。

X4（与えられた条件が全て正しく明確化された図に、条件を満たす具体的な数の組み合わせを加えて表現している）の段階の生徒は、Y1（面積を計算していない）、Y2（一通りの具体的な数値で面積を計算している）、Y3（二通り以上の具体的な数値で面積を計算している）の領域に分散しており、１回目の調査と２回目の調査ともに、正答者率は Y1、Y2、Y3 の順に高くなっていることが分かる。Y1 で正解した生徒は、面積を根拠とせずに結論のみ記述していた生徒である。

X2、X3（与えられた条件が全て正しく明確化された図に、抽象化された文字や式、言葉、または具体的な数の組み合わせを加えて表現しているが、そこに誤りのある）の段階の生徒はごく少数で、全て Y1（面積を計算していない）の段階にあり、正答者はいなかった。

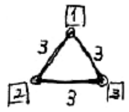
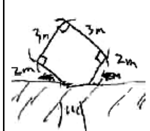
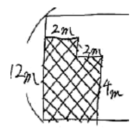
X1（対象の本質的な部分を単純化して図で表現しているが、与えられた条件が全て正しく明確化された図になっていない）の段階の生徒は、Y1～Y4 の領域に分散しており、ほぼ全ての解答が誤答であった。２回目の調査で唯一正解していた生徒は、フェンスと家の位置関係を描き誤っていたが、結果的に正しい解答となった生徒である。

X0（対象の本質的な部分を単純化して図で表現していない）の段階の生徒は、図を描こうとはしているが囲いの形を示すことができていない者や、図を使わずに問題文を言葉で整理している者、白紙の者が該当する。この段階の生徒は、Y1～Y3 の領域に分散しており、１回目の調査ではそれぞれの領域に正解した生徒がいた。この中には、金網の長さを単純に四等分して解答した者や、面積が最大になる形が正方形であることを理解していた者、頭の中で図をイメージして正しく解答した者などがいると考えられる。正答者率は Y1、Y2、Y3 の順に高くなっている。

(3) 「視覚的手段」における X1 の図の分析

X1 に分類された答案は、図で表現するための条件の明確化において誤りがあるものである。どの条件を正しく認識できなかったかという点から、典型例を示してまとめたものが表 11、表 12 である。与えられた条件と異なっている箇所を、網掛けで示している。

表 11　１回目の調査問題で X1 と分類された生徒が描いた図形の内容と典型例

条件 / 図形	金網を曲げた部位の数	金網を曲げてつくった部位の直角の数	隙間の有無	図の典型例
A	２か所	０個 または １個	ない	
B	３か所	３個	ある	Ｂ１  Ｂ２ 
C	４か所	３個	ない	

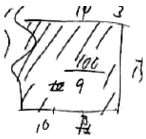
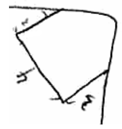
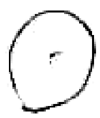
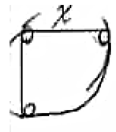
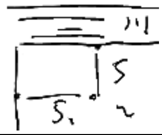
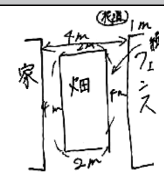
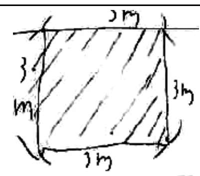
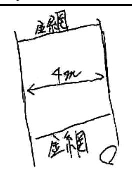
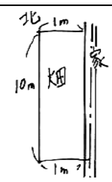
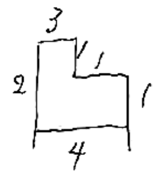
条件 / 図形	金網を曲げた部位の数	金網を曲げてつくった部位の直角の数	隙間の有無	図の典型例
D	２か所	２個	ある	Ｄ１  Ｄ２ 
E	様々	様々	ない	Ｅ１  Ｅ２  Ｅ３ 
F	１か所	１個	ある	
G	様々	様々	様々	X1 と分類される図を複数描いている

表 12　２回目の調査問題で X1 と分類された生徒が描いた図形の内容と典型例

条件 / 図形	何と接しているか	畑が長方形か	どのようにして花壇を避けているか	金網を切っているか	図の典型例
H	なしまたは不明	長方形	花壇の位置を想定して避ける	切ってない	
I	フェンス	長方形	花壇の位置を想定して避ける	切ってない	
J	フェンスと家	長方形でない	花壇の面積もしくは、花壇を囲う正方形を除く	切っている	
K	フェンスと家	長方形	フェンスの長さから二つの花壇の直径を差し引く	切っている	
L	家	長方形	花壇の位置を想定して避ける	切ってない	
M	フェンスと家またはなし	長方形でない	花壇を囲う正方形を除く	切ってない	

(4) インタビュー調査の分析

対象とした生徒Ｐ、生徒Ｑ、生徒Ｒ、生徒Ｓ、生徒Ｔ、生徒Ｕ、生徒Ｖの「視覚的手段」及び「数学的手段」の二つの軸による分類と、解答の正誤状況を表 13 で示す。

表 13　インタビュー対象者の分類結果及び、解答の正誤

	１回目			２回目		
	視覚的手段	数学的手段	解答の正誤	視覚的手段	数学的手段	解答の正誤
生徒Ｐ	X4	Y2	正解	X0	Y2	不正解
生徒Ｑ	X0	Y1	不正解	X0	Y1	不正解
生徒Ｒ	X0	Y1	不正解	X0	Y2	不正解
生徒Ｓ	X0	Y2	不正解	X2	Y1	不正解
生徒Ｔ	X1	Y1	不正解	X4	Y3	不正解
生徒Ｕ	X1	Y1	不正解	X1	Y3	不正解
生徒Ｖ	X1	Y1	不正解	X1	Y1	不正解

ア　２回目の調査問題で「視覚的手段」の段階が顕著に下降した生徒Ｐ

生徒Ｐになぜ２回目の調査問題で図を描かなかったのかを尋ねたところ、「１回目の問題で図を通して考え、解き方について一定の確証を得たことで、２回目の問題も１回目と同じように解くことができると考えて、図を描く必要がないと判断した。」と答えた。なぜ同じように解くと考えたのか尋ねたところ、「『囲う』という言葉があるから、１回目と同じだと思った。」と答えた。

１回目の調査問題に解答した経験により、２回目の調査問題でも、「囲う」という言葉から周囲が全て金網で囲われた囲いを連想し、図を描くことを省略したことが分かる。

イ　１回目、２回目ともに図を描いていない生徒Ｑ、生徒Ｒ

生徒Ｑは、図を描いていないが文章で説明しようとしていた。文章で表現していたことについて理由を尋ねると、「考えを整理したくて、文章を書いた。」と答えた。また、図を描かなかったことについて、「描くとしたら、下の方に描くから、文章を書き切ってから図を描く。」と答え、「これぐらいの状況であればイメージができる。図を描く必要はないと思った。」と答えた。生徒Ｑは、事象を図によって視覚的に理解するよりも、文章によって言語化して理解する方が得意と考えられる。

生徒Ｒは、図を描かなかったことについて、「写真を見ると図を描かなくてもよい、図を描いたとしても数学が苦手なので、分からないと思った。」と答えた。図を描くことを阻む原因として、「数学が苦手」という意識があることが分かる。

ウ　１回目の調査問題では図を描かなかったが、２回目の調査問題で図を描いていた生徒Ｓ

１回目で図を描かなかった理由について、「適当な広い敷地があり、囲いをどこに置くかという指定がなかったから。」と答え、「２回目ではいろいろな障害物があり、それを考慮しながら長方形をつくっていくため、いろいろなやり方を考えることができた。」と答えた。１回目の調査問題で図を描かなかったのは、敷地と囲いの位置関係には条件が示されていなかったためだと考えられる。２回目の調査問題では、西側のフェンスや花壇、家などに囲まれた狭い敷地という状況設定により、囲いをどこにつくるかを丁寧にイメージして図で表現する必要性を感じたのではないかと考えられる。

エ　１回目、２回目の調査問題で「視覚的手段」、「数学的手段」の段階がいずれも上昇した生徒Ｔ

生徒Ｔは、２回目の調査問題の感想に「いろいろな案が浮かんだ。」と記述していた。なぜ、そのように思ったのか理由を尋ねたところ、「２回目の問題は限られた敷地内で長方形をつくるため、金網を曲げる必要があることが分かってから、いろいろな案が浮かび、フェンスを使えると思った。」と答えた。問題場面をイメージして色々と考えるうちに、フェンスを１辺として利用して長方形の囲いをつくることが効率的なつくり方だと判断したことが分かる。

オ　１回目の調査問題の感想に「自分の意思を介入させてよいか分からない」と書いた生徒Ｕ

１回目の調査問題でどのように考えたのかを尋ねると、「３か所が直角で隙間のない図形を考えたところ、(扇形のような）湾曲したような図形になるということが分かった。４か所目を直角にして長方形にしようと思ったが、４か所を直角に曲げるとは問題文には書いていなかった。問題文にある金網の３か所を直角に曲げた隙間のない囲いは、不自然な図形にしかならない。どちらで考えればよいのか、自分の意思や意見を介入させてよいのか分からなかった。」と答えた。生徒Ｕは、長方形の角の部分を金網のつなぎ目にするという発想が浮かばず、問題の条件を正しく認識できなかったと考えられる。

カ　２回目の調査問題において、答えの欄に面積の異なる二つの長方形を描いていた生徒Ｖ

二つの長方形を描いた理由について尋ねると、「答えがたくさんあると思った。自分がつくることを想定して、答えに書いた。」と答えた。生徒Ｖは囲いを何通りか図で示していたが、問題を解くために必要な構造である「面積が最も大きな囲い方を見つける」ということを見抜けておらず、解答を一つに絞り込むことができずに、最終的には生徒Ｖ自身の好みにより複数の答えを決めていたと考えられる。

５　成果と課題

(1) 成果

２回の調査問題を作成し、高校３年生が行う「現実の世界の数学化」について、「視覚的手段」と「数学的手段」の二つの軸で分析を行った結果、次の３点の課題の傾向が見られた。

１点目は、対象の本質的な部分を単純化して図として表現していない生徒が一定数いたことである。そして、表９、表 10 によれば、図を描いていない X0 の段階の生徒のうち、１回目の調査では 78.2％（55 人中 43 人）、２回目では 51.5％（33 人中 17 人）の生徒が面積の計算を行っていない。つまり、図を描いていない生徒は、広さに関わる問題を解決する際に、面積を根拠として示さずに結論を導き出そうとする傾向が見られた。「学び方の上手な学習者を育てるために－学習方略プロジェクト H23 年度の研究成果－」（植坂ら、2012）では、学力が異なる四つの大学の学生を対象に、英語、数学、国語、社会、理科の五教科において、高校時代にどのような学習方略を取っていたか、その実態を調査している。その中で、最も学力が高いとされる大学に通う大学生は、他の大学に通う大学生と比べて、数学の勉強方法（学習方略）として、「数学で分からない問題に出会ったら、図や表をかいて考えた」と回答した学生の割合が高かったことが挙げられている。これらのことから、図を描くことは、問題を解くための手がかりを獲得することと関係していることが示唆される。一方で、インタビュー調査における生徒Ｑのように言語化して理解する方が得意と考えられる生徒がいることや、生徒Ｒのように数学に対する苦手意識から図を描こうとしなかったと考えられる生徒もいることに留意する必要がある。

２点目は、与えられた条件が全て正しく明確化された図を描けなかった生徒が多いことである。１回目の調査問題では、３か所を直角に曲げるという条件から、三角形を描いていた生徒が最も多く、２回目の調査問題では、畑が西側のフェンスに接していない図を描いていた生徒が最も多かった。当然のことながら、誤った図を描いていた生徒は、適切な問題解決へ向かえず、正答者がほぼいなかった。生徒Ｕは、問題文に与えられた条件をもとに考えた図形が不自然な形になり、「自分の意思を介入させてよいのか分からなかった。」と答えており、問題文にある条件を正しく認識できずに戸惑った様子がうかがえる。問題文にある表現に忠実に考えることや、もう一度読み返してみようとする態度を育てる必要があると考えられる。

３点目は、具体的な数値で面積を計算することに留まり、抽象的な文字を用いて、面積を二次関数として表現した生徒が極めて少ないことである。辺の長さを変数として、面積を二次関数で表現することで、辺と面積の関係を二次関数のグラフの特徴から読み取り、面積が最大となる辺の長さを求めることができる。関数を用いることは、具体的な数値を使って何通りもの計算を積み重ねる

こととは異なって、最大値であることを確実な根拠をもって示すことができるという長所がある。小学校から高等学校までの算数・数学の授業の中で、日常生活や社会の事象を数学によって解決するときには、文字を使って表現することのよさと、それを使って問題を解くことの有効性を実感できるような指導を行う必要がある。

以上のことから、「現実の世界の数学化」の授業における指導の示唆は次のとおりである。

・まずは間違いを恐れず図を描くことを生徒が実行するように意識付けをすること。図を描くことが、問題を解く手助けになることを生徒と教師で共有すること。

・与えられた条件を全て満たした図になっているかどうかを生徒に吟味させること。

・抽象的な文字を使って表現することのよさとその有効性を伝えること。

(2) 課題

研究における課題は、以下の３点である。

１点目は、今回の調査問題が、調査を受けた生徒にとって十分に現実に直面する問題と実感できるもの、主体的に問題を解決しようと思える内容となっていたかという点において、なお検討が必要だということである。解答用紙にある感想欄には、「現実になさそうな問題」といった記述や、「日常生活で直面するかもしれない」といった記述があり、生徒によって反応は様々であった。本当の現実の問題と、時間等の制約の中で行う調査問題には隔たりがあり、そのことに違和感をもった生徒もいたと考えられる。生徒が解決したいと思える現実的な問題を題材に、「現実の世界の数学化」を行うことで問題をよりよく解決できたという体験をさせることによって、数学の有用性の理解へとつなげることができるのではないかと考える。

２点目は、今回行ったインタビュー調査が、図を描いていなかった生徒や問題を解決できなかった生徒を主な対象としており、抽象化された文字を使って面積を二次関数として表現した生徒に対しては、調査を行うことができなかったことである。今後は調査の対象を広げ、「現実の世界の数学化」を達成できている生徒の学習履歴や、具体的な数字を扱うことから抽象的な文字を扱うことへと移行するときの思考過程等についても、研究を深めていきたい。

３点目は、生徒が行う「現実の世界の数学化」における課題に対して、本研究で得られた指導の効果を検証していないことである。これからの実践の中で、図を描くことで問題を解く手がかりを得られることや、抽象的な文字を使って表現することのよさとその有効性を実感させるような授業を追求していき、それらのことが生徒の基礎学力や学習意欲の向上に結び付くかどうかを検証していきたい。

【参考・引用文献】

文部科学省（2017）：小学校学習指導要領解説　算数編

文部科学省（2017）：中学校学習指導要領解説　数学編

文部科学省（2018）：高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編

日本学術会議（2013）：大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準数理科学分野　数理科学委員会　数理科学分野の参照基準検討分科会

植坂友理・鈴木雅之・市川伸一（2012）「学び方の上手な学習者を育てるために－学習方略プロジェクト H23 年度の研究成果－」、pp. ４-10

三輪辰郎（1983）：数学教育におけるモデル化についての一考察、筑波数学教育研究第２号、pp. 117-125

片桐重男（2014）：算数教育学概論指導法・評価・事例編、東洋館出版社、p. 41

西村知子・上村辰彦・山中史裕（2018）：高等学校における多様な進路希望の実現に関する研究－数学の基礎学力の定着と向上を目指した学力定着把握検査の活用－、平成 29 年度研究紀要、高知県教育センター、pp. 38-49

中越啓介・上村辰彦・杉山太夏子（2019）：高等学校における多様な進路希望の実現に関する研究－「学びに向かう力・人間性等」の育成を目指した授業改善の方策－、平成 30 年度研究紀要、高知県教育センター、pp. 18-30