ICT を活用した数学科授業デザインの研究

いの町立伊野南学校　教諭　藤井　圭介
高知大学大学院総合人間自然科学研究科教職実践高度化専攻　指導教員　中野　俊幸

【研究の概要】
本研究は，全国学力・学習状況調査で課題となった図形・関数領域の理解度向上と、教育現場での効果的な ICT 活用をめざすものである。具体的には、動的数学ソフトウェア「GeoGebra」を用いて，平林の数学的教具論から PC・タブレットを「思考器具」として活用する教材および授業デザインの開発を行った。幾何領域では Sinclair & Robutti の DGEs におけるドラッグの認知的・認識論的影響の考察を基にした図形探究，代数領域では Heid らの考察から CAS を活用し変数を操作する「パラメトリック探究」を開発した。生徒が主体的に対象を動かし，数学的性質を帰納的に発見・推論する活動を実現する授業を行い，その教育的有効性を検証した。さらに，本県数学教育の質的向上に寄与することを目的として，教員の ICT 活用の経験を問わず活用可能な実践事例を整理した。

【キーワード】　ICT活用　Geogebra　中学校数学　Dynamic Geometry　CAS

１．はじめに

令和 5 年度全国学力・学習状況調査の結果，全国的に図形領域の正答率が低迷しており，本県ではその傾向がより顕著である。また，関数領域においても知識・技能面の課題が浮き彫りとなった。これらの課題解決に向け，「教育の情報化に関する手引き(文部科学省 2020)」や「第 4 期高知県教育振興基本計画(改訂)」では，ICT 活用による学習意欲の向上と「分かりやすい授業」の実現，教員の ICT 活用及びその指導力向上を重要課題として掲げている。しかし，ICT 活用の手法やソフトウェアは多岐にわたり，現場での効果的な運用は一様ではない。そこで本研究では，動的数学ソフトウェア「GeoGebra」に着目して，生徒が主体的に図形を操作し，変数を入力して数学的性質や法則性を推論・探究する授業デザインおよび ICT 教材を開発し，その有効性を検証するとともに，若手からベテラン教員までが幅広く活用できるよう，具体的な実践事例を整理・提供し，本県数学教育の質的向上に寄与することをめざす。

２．ICT を活用した教材の理論的枠組み

(1)　数学的教具論としての PC・タブレット活用について

平林(1973)は，数学的教具の本質的特性から，数学的教具を次の表 1 のようにまとめており，この分類を PC・タブレットの活用に解釈すると表 2 のようになる。

1 種	つめこみ器	フラッシュカードなどの典型的なもの
2 種	説明器	立体模型など噛みくだいて教えるための器具
3 種	思考器具	子どもに多様な思考を触発し種々の方向からそれへの近接を許す器具

表 1

1 種	つめこみ器	計算練習やドリル学習を，ICT を活用して行う使い方で，近年は AI ドリルで高度に実現しようとしている
2 種	説明器	数学的性質や立体の展開，切断などをシミュレーションして示す使い方(生徒による自発的な変数の入力や操作は不可能)
3 種	思考器具	シミュレーションを提示する使い方だが，生徒が自発的に変数の代入や操作が可能，生徒が主体的に自由に操作できる

表 2

PC・タブレットは，まさにこのような優れた第 3 種の教具として活用でき，図形を連続的に動かすことによって多様な思考が触発され，その解決に迫れる様々なツールがあり，ツールがまた思考器具としての役割を果たし，性質の発見やさらなる探究に繋がると考える。本研究でめざしている数学学習での PC・タブレットの活用は，この第 3 種の教具である。

(2)　動的幾何学習場 DGEs とツールの役割について

PC 画面上にかいた図形を動かすことで幾何学習を行う場を作ることを「動的幾何学習場(Dynamic Geometry Environments : DGEs)」と呼び，Sinclair & Robutti(2013)は，DGEs において証明活動を行うことの意義を考察し，証明プロセスにおける幾何ソフトのツールの役割，特にドラッグとメジャーの役割の認識論的・認知的影響を考察している。ドラッグの認知的影響は，表 3 のように推論の段階とそれに対応する 4 つの種類があり，それは 2 つのカテゴリーに分類されるとしている。本研究では，ここで得られた認知的影響に対応するドラッグとメジャーを幾何の探究活動にどのように反映させるかを考慮して教材開発と授業デザインを行った。

探索・推測のためのドラッグ	【推論をしていない段階】 さまよえるドラッグ：あてもなくドラッグする
	【性質に気づき始めた段階】 境界線上のドラッグ：境界となりそうなところをドラッグする
推測や証明を検証するためのドラッグ	【推論した性質が正しいかどうかを確認する段階】 きまりに従ったドラッグ：一定の方向に動かすなど性質の図的特徴を探るようにドラッグする
	【推論した性質を正当化する段階】 関連させて検証するドラッグ：性質の特徴的な箇所を確かめ，性質に関連させてドラッグする

表 3

(3)　CAS を活用したパラメトリック探究について

中高の数学教育において，代数分野では，コンピュータを活用するソフトウェア・システムを「Computer Algebra System (略：CAS)」と称し，Heid, Thomas & Zbiek(2013)は，海外の数多くの論文を参照して CAS 活用の研究について整理し考察している。その論文を元に，関数を定義する代数式の係数や定数項を，特定の関数を決定する要素(パラメータ)の変化とそれに伴うグラフの動的変化との関係を見取りながら，パラメータの図的意味やグラフの動的変化で現れる数学的現象を発展的に考察する数学的探究活動を「パラメトリック探究」と称することとし，本研究では CAS を活用してパラメトリック探究を実現するための代数教材，及び授業デザインを作成した。

中学校数学の教科書には，関数のパラメータ変化を可視化する ICT 教材が導入されているが，その活用は教師による提示説明に留まる傾向にあり，生徒主体の探究活動の実現は未だ課題である。一方，高校代数におけるパラメータ問題も，関数の決定や解の判別に主眼が置かれ，変数の連続的変化に伴う動的現象そのものを数学的探究の対象とすることは少ない。以上の現状を踏まえ，本研究では CAS を活用した「パラメトリック探究」を提唱する。これは，生徒自らがパラメータを操作し，グラフの動的変容から数学的法則性を帰納的に推論する活動である。本研究におけるパラメトリック探究は，以下の表 4 の 5 点において数学教育的意義を有すると考える。

①	グラフの一般的形状の動的イメージの理解	静的なグラフを代表例と捉え，動的な変化を通じて可変・不変部分を含む一般的形状として認識すること
②	グラフの図的変化における不変性と共変性としてのパラメータの理解	幾何的特性とパラメータとの関係を図的変化における不変性と共変性として捉えること
③	グラフの幾何的性質とパラメータとの関係を発見する文脈の構成	生徒の自律的な操作を通じて幾何的性質と代数式の関係を主体的に発見する場を設定できること
④	グラフ変動で現れる図的現象から数学的法則性を帰納的に推論する活動の実現	包絡線や軌跡，残像などの動的な図的現象を観察し，そこから新たな数学的法則性を帰納的に推論・創造すること
⑤	グラフ変動で現れる数学的現象から垂直的数学化する活動の実現	推論した法則を数式で論証して一般化し，具体的な現象をより高度で抽象的な数学体系へと高めること

表 4

3．開発した ICT 教材と授業デザイン

(1)　DGEs による探究活動の教材(以下 DGEs 教材)と授業デザイン

① 探究授業 1：2 つの合同な三角形の対応する 2 辺のなす角の大きさを探究する活動

図 1 のように，正三角形 ABC において点 D，E はそれぞれ AB，BC 上を AD=BE となるように動く教材を作成した。このとき，△ACD≡△BAE であることから∠AFC＝120°（一定かつ正三角形の外角に等しい）となることを探究させる。また，図形の読み取りが苦手な生徒への配慮として，チ

ェックボックスを使用して，合同な三角形と対応する辺や角に色分けしており，すべてチェックボックスを使用する。図 2 は，「正三角形でなければ」の発展課題に対応して他の正多角形でできるようにした図の一例である。

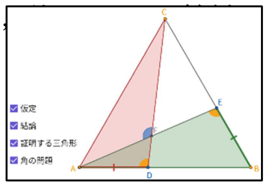


図 1 正三角形の教材

本教材は，1 点を共有する 2 つの正多角形の不変性を考察する「探究授業 2・3」の前段階として開発した。複雑な図形の中から合同な三角形や不変な要素を見取り易くするため，まずは簡略化した図形を用いて構造把握などの経験を積ませるために作成したものである。教材を通じ，点 D,E が線分上のどの位置にあっても同一の証明で成立するという「証明の全称性」を理解させるとともに，「条件が正三角形でなければどうなるか」といった条件変更による問題の発展を促す。これにより，図形の構造を捉える基礎的な視座を与え，高次な探究活動へスムーズに接続するための確実なステップアップを図るものである。

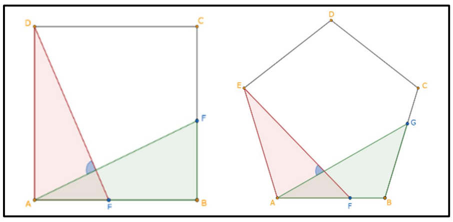


図 2　正方形・正五角形への発展

授業の導入では，図 1 を使って点 D，E を動かしても合同になる三角形はないかと問い，2 つの三角形の合同を証明する。展開では，点 D，E を動かしても不変なものがないかを問い，∠AFC＝120°となることを発見させる。このことを導入で証明した合同な三角形を使って証明する。発展では，「正三角形でなければ」と問い，他の正多角形でも同じように不変な角の性質が成り立つかを検証する。

② 探究授業 2：1 点を共有する正三角形の対応する点を結んだ線分の長さを探究する活動

図 3 のように，点 A を共有する 2 つの正三角形 ACE と ABD において，正三角形が点 A を中心に回転する教材を作成した。本教材は正三角形が回転しても常に BE=DC となり，回転による連続的変化に対応して証明の記述が変わる境目を探究させることをねらいとしている。図 4 は証明活動における発展問題で，正三角形を直角二等辺三角形にしたもの，図 5 は，図 3 の点 B をドラッグして△ABD を回転させ，証明の記述が変化する境目を探るときの連続的変化の一コマを示したものである。

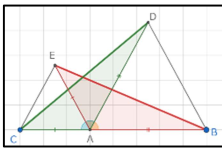


図 3 回転する教材

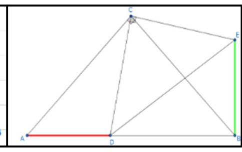


図 4 発展問題

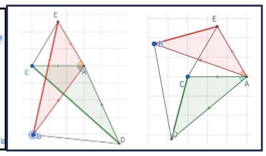


図 5 回転の連続変化

授業は 2 時間扱いとし，1 時間目は図 3 の教材で証明活動を重視し，図 4 を演習問題として作成した。次時は，図 3 を用いて△ABD を，点 A を中心に回転させ，証明の記述の変化を探究させた。以下は，2 時間目の授業デザインである。

導入では，図 3 の点 B を少しだけ下方向に動かして見せ，1 時間目に証明した内容が変化するかを問い，変化しないことを確認させる。展開では，実際に生徒が点 B をドラッグして△ABD を回転させ，証明が変わる境目を探究させて，それぞれの場合を証明し，その証明内容を比較する。なお，この授業の発展段階が次の③の教材による授業になる。

③ 探究授業 3：1 点を共有する正多角形の対応する点を結んだ線分のなす角を探究する活動

多くの教科書にも掲載されている図 3 の教材は，1 点を共有する正三角形を回転させ，対応する 2 つの線分 BE と DC が等しいことを不変量とするものである。筆者が教材研究・開発をしながら図 6 のような図を作成して正方形を連続的に回転させる中で，長さ以外の不変量がないかと眺めていたところ，2 直線の角度が一定(90°)であることを発見した。さらにこの角度は，正多角形の外角になることに気づいた。これをあらためて教材とするために，正多角形の大きさも自由に変えられるようにした。発展として図 7 のように正方形の他に正五・六角形も作成し，角の性質を探究，検証できる教材を作成した。

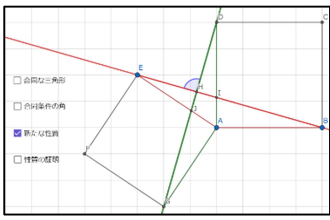


図 6 回転する正方形の教材

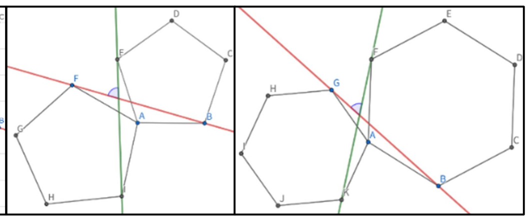


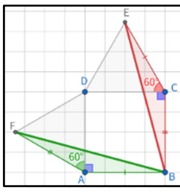
図 7 正五角形・正六角形に発展させた教材

授業の導入では，上記の角の不変性を考える前に，図 6 で授業を展開しておき，その発展として正三角形でなく正方形でも EB=GD になるかを考えさせ，△ABE≡△ADG が成り立つことを証明させる。展開では，EB と GD の長さ以外で不変性がないかを探究させる。ドラッグして動かすこ

とで，交わる角 DHE が 90°であることを発見させ，△ABE≡△ADG から証明させて検証する。発展では，正方形以外ではどうなるかを探究させ，一定かつ正多角形の外角と等しいことを発見させ，証明を考えさせる。

④ 探究授業 4：正方形や正三角形の条件を緩めて証明が成り立つことを探究する活動

図 8 のように，正方形とその辺を 1 辺とする 2 つの正三角形において，△BCE≡△FAB であることを用いて BE＝BF が成り立つことが，正方形や正三角形の条件を緩めても成り立つかということを検証する。本教材は正方形の頂点を動かすと長方形，ひし形，平行四辺形，台形に緩めることができるように作成している。また，これとは別に，図 9 のように正三角形を直角二等辺三角形や二等辺三角形などに緩めて検証できるよう作成した。



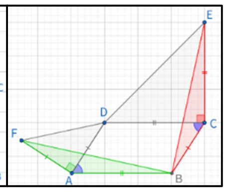


図 8 緩める教材　図 9 二等辺三角形

授業の導入段階では，図 8 の正方形の状態で対応する線分が等しいことの証明を確認する。その証明を元にして，展開段階では正方形を台形まで緩めて性質が成り立つかどうか確認する。この展開段階が，条件を緩める検証の仕方を学ぶ段階となる。発展段階では，図 9 を含む 2 つの教材を用いて，正三角形の条件を緩めて生徒自らが検証していく。

(2)　CAS を活用したパラメトリック探究の教材（以下 CAS 教材）と授業デザイン

① 格子点を活用したパラメータと図形の性質（平行，直角）との関係を発見させる授業

図 10 のように，定点 A と整数座標の格子点上を動かすことができる点を通る 2 つの 1 次関数のグラフにおいて，点 B・C をドラッグして格子点上を動かすことで，グラフの傾きとなす角が垂直になるときの関係を探究する教材を作成した。垂直に交わるグラフの特徴は高校数学の内容であるが，本教材は中学校の代数分野において 2 直線が垂直に交わるときの傾きには，どのような関係があるのかという疑問を中学校段階で探究し，帰納的に解決を図るために開発したものである。

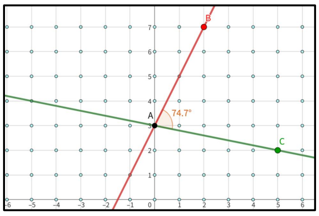
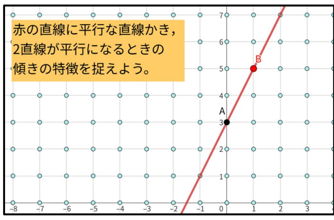


図 10 垂直に交わる教材

格子点を活用することで，パラメトリック探究③を実現させることを狙いとしている。グラフを自由に動かすとそのなす角の測定値には近似性や不確実性(Sinclair & Robutti 2013)が表れてしまう。そこで格子点を活用することで，整数座標上という制限されたパラメータにはなるが，上記の近似性や不確実性を考慮しなくてよくなる。また格子点の活用は，実験的な結果から帰納的に法則を発見することであり，生徒に性質発見の過程を経験させるための有効な手段と考えられる。

授業の導入段階は図 11 の教材を用いて平行なグラフの傾きを復習し，「平行以外の関係は」と問うことで図 10 に繋げる。数学的思考が刺激され垂直に交わるグラフの傾きという新たな課題を生むことができる点は，この教材が「思考器具」としての役割を果たしていたことを示している。展開段階は，図 10 のような問題を 2～3 問探究することで，垂直に交わる 2 直線の傾きの特徴を探る。発展段階は，図 12 のように傾きの逆数の符合を変えた直線を描かせ，実際に垂直に交わるかどうかを実験的に検証させたり，直角三角形の合同を用いて演繹的に証明させたりする活動を行う。



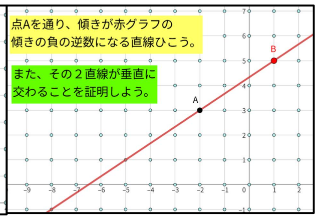


図 11 平行なグラフの教材　　図 12 検証させる教材

② 2 次関数のパラメータを連続的に変化させ頂点の軌跡を数学化する授業

図 13 のように，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを表示し，a，b，c の 3 つのパラメータのスライダー（変域の初期設定は-10 から 10）を用いてグラフや頂点がどのように動くかその軌跡を探究する教材を作成した。中学校段階では，1 次関数 y=ax+b を復習できるように，チェックボックスを用いて表示・非表示を切り替えることができるよう設定した（図 13 は 1 次関数・2 次関数同時に表示している）。また，1 次関数では y 切片，2 次関数では頂点を表示できるようにすることで，パラメータの連続的変化によるグラフの軌跡がより明確に検証できるようにした。

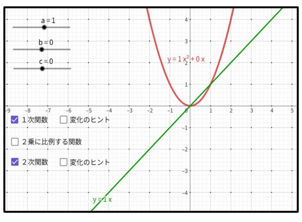


図 13 2 次関数の教材

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ では a, b，c のうち 2 つの値を固定して，1 つの値を変化させる。例えば b=0 ，c=0 としてパラメータ a を変化させると，放物線が開いたり閉じたりする現象を見せることができる。a=1 ，b=0 としてパラメータ c を変化させると，放物線が上下に平行移動する現象を見せることができる。これらのことは，教科書付属の ICT 教材でも見せることができる内容である。ところが今度は，a=1，c=0 としてパラメータ b を変化させる（スライダーの b の増分は 0.1 に設定）と，頂点 P の軌跡が図 14-A～D のように放物線が描かれることを見せ，美しい数学的現象を発見させることができる。さらに a，c を他の値に固定して b の値を変化させたときの放物線を比較させることで，その放物線 $y=-ax^2+c$ であることを帰納的に類推させることができる。

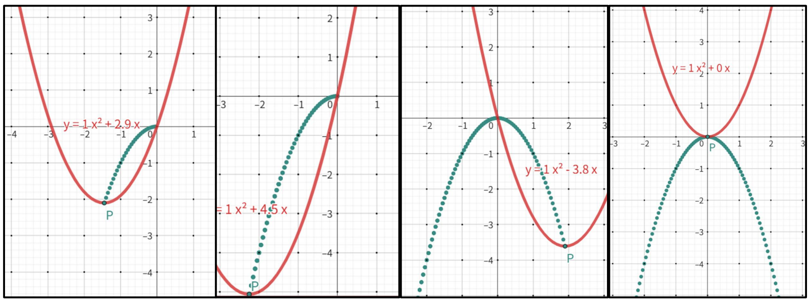


図 14-A　図 14-B　図 14-C　図 14-D

本教材では，パラメータの値を連続的に変化させたときのグラフの図的現象から，表 3 のパラメトリック探究④，⑤を実現させることを狙いとしている。パラメトリック探究④については中学校段階で，パラメトリック探究⑤の一般化・形式化・記号化は中学校段階，演繹的な確証による一般化は高校段階において実現させることが可能である。

授業の導入段階は，図 13 の 1 次関数 y=ax+b を用いてのグラフがどのように動くか，パラメータ a，b をそれぞれ連続的に変化させて確認する。その際，切片 b の変化によるグラフの動きは，一見すると横や斜めの平行移動に見える（実際に生徒は斜めに移動していると答えた）ことから，y 切片を点として表示することで，上下の平行移動であることを意識づけることができた。またこれは，2 次関数におけるグラフの動きを見るための布石であり，生徒にグラフの代表的な点で軌跡を見るという発想の土台を作ることができた。展開段階は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを用いて，まず b=0，c=0 の 2 乗に比例する関数において，パラメータ a を変化させるとグラフはどのように動かくかを動的に復習する。次に 1 次関数のようにこのグラフを上下に平行移動させたい場合どの値を変化させればよいかと問うことで，パラメータ c の意味について予測し確認する。発展段階は，$y=ax^2+bx+c$ の a，c の値を固定し，パラメータ b を変化させてグラフがどのように動くかその特徴を検証する。まずは a=1，c=0 に固定して残像なしでグラフを動かしたり，グラフの残像を残して動かしたりして見せる。その動きが不明瞭であるため，ここで，「代表的な点で動かしてみたらどうか，$y=ax^2$ の代表的な点とはどこだろうか」と投げかけることで頂点の軌跡へと導く。パラメータ b を変化させて図 14-D を表示し，グラフと軌跡を比較してその特徴を予測する。図 15-A は a=3，c=0 ，図 15-B は a=-1，c=0，図 15-C は a=1，c=2 のように a，c の値を変えて頂点の軌跡を表示したまま残して比較することで，$y=ax^2+bx+c$ の頂点が放物線 $y=-ax^2+c$ 上を動くことを帰納的に導き出す。

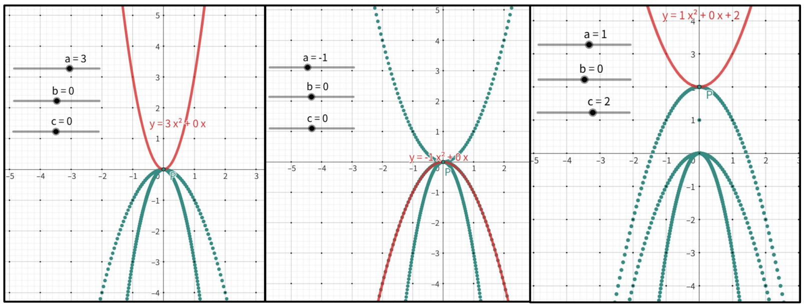


図 15-A　図 15-B　図 15-C

４．教材の数学教具的意義と探究活動の考察

(1)　DGEs 教材について

① DGEs 教材の数学教具的意義

本研究の幾何の探究活動における数学的教具としての DGEs 教材の役割は，Ⅰ図形の主体的操作，Ⅱ図形操作による幾何的性質の発見，Ⅲ新しい数学的課題の創出の 3 点とする。全ての DGEs

教材において，生徒が主体的に図形を操作することで，静的な図では不可能な「動的な幾何学習の場」を成立させることができ，生徒は与えられた操作をなぞるだけでなく，自ら連続的に図形を動かすという主体的活動を通して，幾何的性質への働きかけが可能となったことはⅠに相当する。また全ての DGEs 教材は，図形をドラッグして連続的に動かすことを可能にし，その操作が生徒の広く豊かな思考を刺激して、幾何的性質の発見を促した。それは図形操作によって不変性を見取ることで，直感的な推測から論理的な推論へと至るプロセスを自ら認識する体験させることを可能にした点でⅡに相当する。探究授業 1,2,3 の教材では，正三角形で成り立つことが検証されると他の正多角形でも成り立つのかという課題設定ができた点はⅢに相当する。また探究授業 4 において，従来の課題発展の方法である「条件を加えて多角形の角数を増やす」だけでなく，「条件を緩める」視点を教材に導入し実践した点もⅢに相当するであろう。これに関しては「5. 実践から得られた成果と課題」で詳しく述べることとする。以上のことから，本研究における DGEs 教材は，平林(1973)のいう「思考器具」としての役割を十全に果たしている。

② 段階的な探究活動のデザイン

生徒の幾何における直感的な推論を段階的に論理的な証明へと高め，幾何的性質の発見を体験するため，以下の 3 段階の探究授業が構成された。

・第 1 段階：不変性の発見と証明の全称性の理解（探究授業 1）

図形の探究活動の土台づくりとして，正三角形の辺上を動く点による合同な三角形を元にした探究を実施した。ここでは，動点がいかなる位置にあっても証明が常に成立するという全称性を理解させ，∠AFC=120°が一定であるという「不変性」を発見させることに主眼が置かれている。

・第 2 段階：連続的変化と証明の境界の認識（探究授業 2）

1 点を共有する正三角形を回転させる課題において，静的な図の列挙ではなく，連続的な回転操作を取り入れた。これにより，図形の配置が変わることで証明の記述が変化する「境界（境目)」を，ドラッグ操作を通じて視覚的かつ論理的に探究させている。

・第 3 段階：前提条件の変更による一般化への拡張（探究授業 3)

正三角形で発見した新たな幾何的性質が，正方形や正五角形でも成立するかを検証させた。これは，「正三角形でなければどうなるか」という問いを生み出し，幾何的性質を一般化する高度な探究活動である。

(2)　CAS 教材について

① CAS 活用の数学教具的意義

本研究のパラメトリック探究における数学的教具としての CAS 活用の役割は，Ⅰパラメータの主体的操作，Ⅱ変動による法則性の発見，Ⅲ新たな数学的課題の創出の 3 点とする。実践で扱った CAS 教材は，生徒が自ら変数を操作し関係性を導出した点で上記Ⅰ,Ⅱを満たす。さらに，既習範囲を超えた課題や固定する変数の自主的選択による探究へと発展した点はⅢに相当する。 以上のことから，本研究における CAS 活用は，「思考器具(平林 1973)」としての役割を十全に果たしている。

② グラフの図的性質の不変性・共変性の理解

2 次関数の導入段階において，$y = ax^2 + c$のパラメータ変動に伴うグラフの動態を確認させた。生徒が動的なグラフの可視化に新鮮さを感じた事実は，パラメータの幾何的意味を動的に捉える指導が従前不足していたことの証左である。本実践により，グラフの図的性質を不変性・共変性として認識させた教育的意義は大きい。一方で，従来の代数指導が静的な理解に留まり，関数変化を直感的に捉える活動を軽視してきたという課題もまた，指摘できよう。

③ 発見の文脈を構成するための格子点活用の効果

格子点を活用し，パラメータと図形の性質(平行・垂直)の関係を探究させる授業では，格子点による制限は，傾きと垂直の関係性の発見において，生徒の主体的な操作を促した。中学 1 年で既習である垂直の概念は，中学 2 年の 1 次関数の平行の学習時に自然な関心事となるが，格子点の活用はこの関心を数学的探究へと焦点化させた。また，整数座標による操作は理論的厳密性が十分ではないものの，CAS を活用した数学的推論による法則発見を可能にし，かつ理論的証明の必要性を認識させる契機とした。

④ グラフ変動による図的現象からの数学化

2 次関数の実践において，$y = ax^2 + bx + c$の各パラメータ操作に伴う頂点の軌跡が放物線や直線

を描く現象の発見は，数学的な現象の美しさを伴うパラメトリック探究の好例である。生徒は既習事項を活用して規則性を帰納的に推論しており，これは知識の再定着に寄与した。さらに，現れた軌跡を数式化する形式化の過程は，特殊な事例から一般化された頂点の軌跡を探究する発展課題へと接続された。帰納的推論から形式化を経て，新たな課題発見へと至る一連のプロセスを具現化した点に，本実践の教育的意義が見出せる。

５．実践から得られた成果と課題

DGEs 教材を活用した幾何の探究授業，および CAS 教材を活用したパラメトリック探究を通して，以下の成果と課題が明らかとなった。

(1)　DGEs 教材の活用による成果

① ドラッグの動かし方とその役割の整理

DGEs 教材による実践と Sinclair & Robutti(2013)が考察したドラッグとメジャーの認知的影響を元に，改めてドラッグの動かし方とその役割を同定し，幾何の探究学習として表 5 のように分類した。これは，幾何の探究学習の各段階におけるドラッグの動かし方と役割が 1 対 1 対応しているため，幾何の探究学習における DGEs 教材を開発するにあたり，各探究段階でのドラッグ操作とその役割が明確になり，生徒の操作から思考の見取りを可能とするため，非常に有効である。

探究の段階	動かし方	役割
発見・推測の段階	○無作為に動かす ○作戦的に動かす ・速度を変えて　・一定方向に ・変域内で　　　・目標に向かって ・条件を満たすように	不変性を見取る
		関数的変化(共変性，依存関係)を見取る
		軌跡を見取る
		図形の境界とその意味を見取る
		極端な場合とその意味を見取る
検証・証明の段階	○作戦的に動かす ・速度を変えて　・一定方向に ・変域内で　　　・目標に向かって ・条件を満たすように	不変性の検証
		関数的変化(共変性，依存関係)の検証
		軌跡の理論性の検証
		図形の境界とその意味の検証
		極端な場合とその意味の検証
		新たな課題の設定

表 5

この分類表を，今後の ICT 教材の開発や授業デザイン作成に活かし，さらに研究を進めていきたいと考える。

② 「思考器具」としての DGEs 教材の有効性の実証

平林(1973)の数学的教具論に基づき，PC・タブレットを生徒の思考を触発する「思考器具」として活用した結果，生徒が自発的に図形の不変性や法則性を発見する探究活動が実現された。特に，図形を連続的に変化させることで，静的な図形では困難な「変化の境界」や「極端な場合」の考察が可能となり，幾何学的な直感の育成に寄与したと考える。

③ 段階的な探究プロセスの構築と検証

「合同な三角形の発見（不変性の発見)」から「回転による証明の変化（境界の探究)」、さらに「正多角形への一般化（前提条件の変更)」へ段階的に難易度を高める単元構成を行った。これにより、基礎的な図形考察から高度な数学的推論へと生徒の思考を導く足場かけが機能することが実証された。

④ 「条件を緩める」検証活動の意義

証明活動における発展の仕方として「条件を緩める」という視点を教材として作成し実践できたことである。「条件を緩める」ことにより，命題が成り立つ最小限の条件を見出そうとする数学的抽象化・一般化の活動を実現でき，さらに検証の方法や，証明の節約を学習することができた。

(2)　DGEs 教材の活用による課題

DGEs を活用した探究活動の課題として，生徒のドラッグ操作と認知的影響(Sinclair & Robutti, 2013)や表 5 の分類との対応関係を，実際の授業進行の中で瞬時に見取り，評価することの困難さが挙げられる。 また，DGEs 特有の動的な操作は学習の履歴として残りにくいため，端末上の操作のみで授業を進行すれば，生徒の思考過程を振り返って明確化できない恐れがある。そのため，静的な図や具体物を併用し，授業の要所で自身の思考プロセスをノートに言語化・記述させる時間を

確保することが重要である。結論として，動的な DGEs と静的なプリントを組み合わせたハイブリッドな授業デザインこそが，探究活動において最も効果的であると考えられる。

(3)　CAS 教材の活用による成果

① 格子点の活用による「発見の文脈」の構築と数学的推論の実現

1 次関数の授業において、パラメータ (座標) を整数値の「格子点」に制限したことは，測定値の近似性や不確実性(Sinclair & Robutti, 2013)を排除し，生徒の関心を「傾きの数値的関係」に焦点化させるうえで有効であった。生徒は，格子点上でのドラッグ操作を通じ，垂直に交わる 2 直線の傾きの関係（積が-1）を帰納的に発見することができた。これは，理論的厳密さには欠けるものの，生徒が主体的に操作を行い，法則を帰納的に発見し一般化する数学的推論の過程を経験させた点で，CAS 活用が「思考器具(平林 1973)」として機能したことを示唆している。

② パラメータの動的変化による図形的意味の理解深化

2 次関数$y = ax^2 + bx + c$の探究において，パラメータを連続的に変化させる活動は，グラフの平行移動や開き具合の変化を視覚的に捉えさせ，各パラメータが持つ図形的意味(c が上下移動に関与するなど)の理解を深めることに寄与した。特に，動的なグラフ操作は，教科書の静的な図では認識しづらい「頂点の軌跡」という動的な数学的現象への着目を促した。

③ 帰納的な一般化・記号化の実現

2 次関数の実践では，複数のパラメータ操作(a，c を固定し b を変化させる等)を通じて，頂点の軌跡が放物線になることを発見させ，それを$y = -ax^2 + c$ の式として帰納的に一般化・記号化することに成功した。これは，中学校段階においても，CAS 活用によって図的現象から数学的法則性を見出す高度な探究が可能であることを示している。

(4)　CAS 教材の活用による課題

① 帰納的発見から演繹的証明への接続の困難性

1 次関数の授業において，実験的な検証(逆数の符号を変えた傾きのグラフが垂直になることの確認)は達成されたものの，直角三角形の合同を用いた演繹的な証明まで完遂できた生徒は極めて少数であった。CAS 活用による直感的な発見と，それを論理的に正当化する数学的証明との接続には一定の困難性があり，これを架橋するための効果的な指導デザインが必要である。

② 一般化された結論の定着と理論的検証の限界

2 次関数の実践において，グラフ操作を通じて軌跡の式へ近接することは可能であったが，学級の全生徒が「頂点が$y = -ax^2 + c$上を動く」という一般化された結論に自力で至ることは困難であった。また，中学校段階の数学的知識では，帰納的に推論した現象の結果 (軌跡の式)の理論的な検証・証明は難しく，学習活動があくまで感覚的発見や帰納的推論の域に留まらざるを得ないという限界が存在する。したがって，理解度を確認するため，まとめとしての確認問題の設定や，高校数学への発展的な接続を意識した指導デザインが不可欠である。

≪引用・参考文献≫

Heid, M. K., Thomas, M. O. J., & Zbiek, R. M. (2013). How Might Computer Algebra Systems Change the Role of Algebra in the School Curriculum?. In Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, Ch., Kilpatrick, J. & Leung, F. K. S. (Eds.). Third International Handbook of Mathematics Education , pp.597-641 .

平林一栄(1973)「数学的教具と遊びの精神」日本数学教育学『日本数学教育学会誌』第 55 巻, pp.58-61.

国立教育政策研究所(2023)『令和 5 年度全国学力・学習状況調査報告書 児童生徒一人一人の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて 中学校数学』，pp.76-77.

高知県・高知県教育委員会(2025)『第 3 期教育等の振興に関する施策の大綱（改訂）第 4 期高知県教育振興基本計画（改訂）』，pp.98-99,137,190.

文部科学省(2020)「教育の情報化に関する手引き－追補版－」,pp.188-199.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the Role of Proof : The Case of Dynamic Geometry. In Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, Ch., Kilpatrick, J. & Leung, F. K. S.

(Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*, pp.571-596.

使用した学習活動端末支援 Web システム
・GeoGebra｜動的数学ソフトウェア（https://www.geogebra.org/）