

数学的な表現力を育てる算数授業の研究

～表す・説明する算数的活動を通して～

四万十市立中村小学校 教諭 今城 季紹

全国学力・学習状況調査の結果、本県では「数学的な表現力を用いて、筋道を立てて自分の考えを説明することが弱い」、「形式的な理解はできているが、既習事項と関連付け根拠を説明する関係的な理解が不十分である」という課題が浮き彫りになった。本研究では、新学習指導要領の趣旨や高知県学校改善支援プラン等を踏まえ、この2つの課題を解決するためには、表す・説明する算数的活動を充実させ、表現様式の変換を行う活動を中心とした授業構成が有効であると考え、この2つの活動を取り入れた検証授業を実施した。その有効性については、①数学的な表現様式、②授業構成、③数学的な表現力を育てるための指導法、以上の3点について具体的な授業場面、児童の姿を通して分析し考察を行った。

キーワード：数学的な表現力、関係的理解、表す・説明する算数的活動、数学的な表現様式、表現様式の変換

1 はじめに

全国的な学力調査（PISA2003、特定の課題に関する調査、全国学力・学習状況調査など）の結果、我が国の子どもたちは数学的な表現力を用いて筋道を立てて自分の考えを説明することが弱いという課題が浮き彫りになった。そして、その改善策として「言葉や図、式を用いたり、具体物を用いたりして表現する活動の充実」と「自分の考えを数学的な表現を用いて説明する活動の充実」の2点が挙げられている。

また、本県の平成20年度全国学力・学習状況調査においても同様の課題が挙げられ、高知県学校改善支援プランには「授業の中で、答えを導き出すまでの考え方やその根拠を文字や図、表、数式を使って説明させる活動」を充実させることが、指導改善の方向性として示されている。

中央教育審議会答申（平成20年）の算数科における改善の基本方針では、表現力にかかわって「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現しあったりすること」の充実が挙げられた。そして、その答申を受けた新学習指導要領では、「日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てる」ことを目標として、新たに「表現する（能力）」の文言が加えられ、表す活動、説明する活動などの具体的な算数的活動が示された。

以上のような全国及び本県の算数科における課題と改善の方向性、新学習指導要領の趣旨を踏まえ、「数学的な表現力を育てる算数授業の研究～表す・説明する算数的活動を通して～」という研究課題を設定し、研究を進めることにした。

2 研究目的

本研究の目的は、数学的な表現力の育成を目指して、数学的な表現様式の変換を意識し、子どもが内発的に表現し説明する算数的活動、表現様式の変換を組み込んだ授業を行い、その有効性について、授業場面、児童の姿を通して分析し考察することである。本研究では、次のような児童の姿を「目指す児童像」とし、以下の研究仮説を設定した。

(1) 目指す児童像

自分の思考過程（考えた道筋）を、言葉や数、式、図、表、グラフなどを使って分かりやすく表現することができる児童

(2) 研究仮説

数学的な表現様式を意識し、子どもが内発的に表現し説明する算数的活動や表現様式を変換する活動を中心とした授業を行えば、子どもたちは言葉や数、式、図、表、グラフなどで表現することの大切さに気づき、数学的な表現力が育つであろう。

3 研究内容

(1) 数学的な表現様式について

算数の時間に子どもたちが行う表現には、次の5つの表現様式がある。

現実的表現：実物を用いて、現実に即した操作や実験を行う表現
操作的表現：おはじき等の半具体物をモデルとして操作する表現
図的表現：絵・図・グラフ等による表現
言語的表現：日常言語による表現
記号的表現：算数で使う記号（数・式等）を中心とした表現 【中原忠男（1992）】

また、それぞれの5つの表現様式のはたらきは、次のとおりである。

現実的表現：現実に即した操作をするため、問題の意味を理解するために効果がある。問題の意味が分からない児童にとっては、このような活動が問題の把握に有効である。
操作的表現：具体的な「現実的表現」と抽象的な「言語的表現」「記号的表現」とを結ぶ中間的なはたらきをするもので、具体から抽象への媒介をするものとして、小学校下学年で有効である。
図的表現：図的表現は、表し方や表す内容に大きな幅がある。小学校下学年の具体的レベルの図から、グラフなど様々である。図的表現は、数学的な構造を明確化したり、イメージ化・視覚化したりして伝えるはたらきがある。
言語的表現：日常言語を用いることから、意味を明確化し、伝達する機能に優れている。言語的表現と他の表現との相互のよみ換えを重視して、それぞれの表現様式によって表現された内容を明確にすることが、考えを整理し、深めるために大切である。
記号的表現：記号的表現は、一定のきまりに基づいているので、思考の過程や結果などを簡潔にしかも厳密に表現できるという特徴がある。また、式を用いることにより、具体的な意味を離れて形式的に処理することができる。

【参考：「数学的に表現したり処理したりする能力を高める指導に関する研究」 東京都立教育研究所 1998】

(2) 数学的な表現様式の変換について

中原忠男は、図1のように表現様式を体系付けている。そして、「ある表現から他の表現へ変換できることが当該事項の理解を深めるし、表現力や問題解決力を高めることになる。」(1)と述べている。これは、数学的な表現力を育成するためには、異なる表現様式間において変換する活動と同じ表現様式内で変換する活動とが有効であるということである。

また、平林一栄は「子供が分からないのは、表記が分からないのであり、よく分かるようになったのは、別なよく分かる表記を与えたからである。」(2)と述べている。このよく分かる表記を与えるというところは、表現様式の変換と考えることができる。

数学的な表現様式の変換には、次のような異なる表現様式間における変換と同じ表現様式内の変換の2つがある。

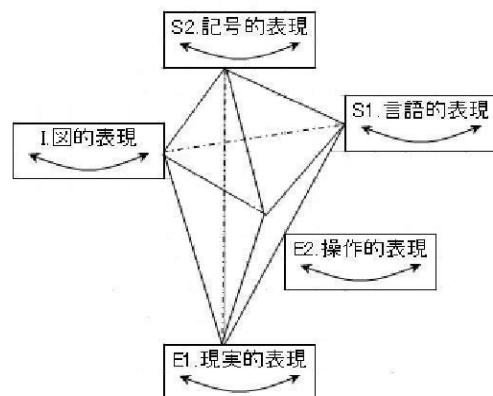


図1 数学教育における表現体系

ア 異なる表現様式間における変換

異なる表現様式間における変換は、次のような活動である。

- 図（図的表現）を見て、友達の考えを説明（言語的表現）する。
- 数直線（図的表現）を見て、友達の考えを説明（言語的表現）する。
- 図（図的表現）を見て、式（記号的表現）に表す。
- 数直線（図的表現）を見て、式（記号的表現）に表す。
- 言葉で説明（言語的表現）したことを、図（図的表現）に表す。
- 言葉で説明（言語的表現）したことを、式（記号的表現）に表す。
- 式（記号的表現）を見て、その式の意味を説明（言語的表現）する。
- 式（記号的表現）と図（図的表現）を結び付ける。 など

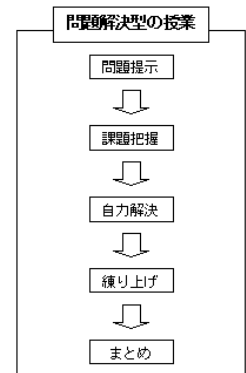


図2 問題解決型の授業

イ 同じ表現様式内における変換

同じ表現様式内における変換は、次のような活動である。

- 友達が説明したことを、自分の言葉で言い換える。（言語的表現内）
- 友達の説明したことを、隣の友達に再現する。（言語的表現内）
- 友達が書いた式と同じ意味の式を探す。（記号的表現内）
- 2つの式を1つの式にまとめる。（記号的表現内）
- 友達のかけた絵と似ている図を探す。（図的表現内） など

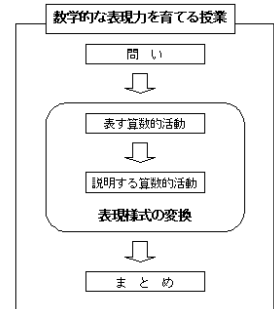


図3 数学的な表現力を育てる授業

(3) 授業構成について

一般的に算数の授業は、図2のような「問題提示→課題把握→自力解決→練り上げ→まとめ」という、いわゆる問題解決型の授業構成で行われることが多い。しかし、この形式にとらわれた算数の授業構成の問題点を坪田耕三は次のように指摘している。(3)

- 問題提示の場面：子どもが「おやっ」「へんだぞ」という疑問をもち、「なぜだろう」という子どもが本当に考えて（課題提示） みたくなる問いの発生が起こっていない。
- 練り上げの場面：問題を解き明かす過程をみんなで体験する必要があるのに、既に解決をし終わった状態で話し合いに参加しても、それは問題解決済みの結果の説明を聞いているだけで解決力はつかない。
- まとめの場面：先生がまとめを書いたカードを貼るのではなく、授業の終わりには、授業の途中でのポイントとなる言葉を使って、子どもの考えをもとにまとめることが大切である。

以上の坪田が指摘している問題点を踏まえ、数学的な表現力を育成するための授業として、表す・説明する算数的活動、表現様式の変換を取り入れた図3のような授業構成を考えた。

ア 児童が「問い」をもつ授業展開について

数学的な表現力を育てていくうえで、最も大切なことは、子どもが表現したくなる授業展開にすることである。つまり、内発的に表現したいという場面、「問い」をもつ場面をつくるのである。このことは、新学習指導要領解説算数編にある「目的意識をもって主体的に取り組む活動」にあたる。右のような場面を設定することで、児童は「問い」をもち、内発的に表現することができると思った。

- 導入場面として条件不足の場面を設定する。
- 求答問題を証明問題にかえる。
- 題材を工夫する。
 - 【きまりが見えてきそうな場面】
 - 【感覚的に判断できない場面】
 - 【自分の考えがずれる場面】 など
- 「えっ？」と投げかけ、立ち止まる場をつくる。
- 「本当に？」「なぜ？」と問いかける。
- 「あれ、変だ？」と思う場をつくる。
- 教師がわざと間違える。

イ 数学的な表現を用いて説明する算数的活動について

新学習指導要領解説算数編には、説明する算数的活動について、次のように書かれている。

第3学年では、計算の意味や仕方を考え、その考えを図で表現したり、言葉で表現したりすることをねらいとし、「整数、小数及び分数についての計算の意味や計算の仕方を、具体物を用いたり、言葉、数、式、図を用いたりして考え、説明する活動（下線筆者）」が示された。

また第6学年では、既習の内容を基にしながら数学的に表現する能力を育てたり、根拠を明らかにして論理的に考える態度を伸ばしたりすることをねらいとし、「分数についての計算の意味や計算の仕方を、言葉、数、式、図、数直線を用いて考え、説明する活動（下線筆者）」が示されている。以上のような説明する算数的活動を授業の中に位置付け、授業構成を考えることが大切である。

ウ 学習後の振り返り（算数日記、研究レポート）について

新学習指導要領総則の教育課程上の配慮事項の4に「各教科の指導に当たっては、児童が学習の見通しを立てたり学習したことを振り返ったりする活動を計画的に取り入れるよう工夫すること。（下線筆者）」とある。算数科において、今までは見通しを立てる活動は重視していたが、学習した内容を振り返る活動が不十分であったと考える。そこで、授業後や家庭学習としての算数日記や単元の終末の研究レポートなど学習内容を振り返る機会を設けることで、学習内容の確実な定着を図ることができ、また図的表現や言語的表現、記号的表現を用いながら、学習のまとめをしていくことは、数学的な表現力の育成につながるのではないかと考えた。

4 実践研究

(1) 授業の実際

表す・説明する算数的活動、表現様式の変換を取り入れた授業実践を、第3学年「あまりのあるわり算」、第6学年「分数のかけ算とわり算（2）」の単元において行った。（別冊参照：学習指導案・授業の記録）

(2) 授業実践の分析と考察

ア 数学的な表現様式について

今回の検証授業では、発達段階や学習する単元から、第3学年においては現実的表現、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現を取り上げた。また、第6学年においては図的表現、言語的表現、記号的表現を取り上げた。【図4参照】

表現様式	表現のはたらき	第3学年	第6学年
現実的表現	・問題の意味の理解 ・現実的意味の確認	色紙を提示し、それを実際に分けていく活動を行った。	
操作的表現	・具体から抽象への媒介 ・動的、操作的処理	半具体物をだんごや色紙、ボール等に見立てて、分ける操作を行った。	
図的表現	・構造の理解 ・イメージ化、視覚化	ノートに、だんごや色紙、ボールの絵・図をかいて、分けていった。	問題の場面を2本の数直線図に表し、立式し答えを出した。その後、それをもとに計算の仕方を説明した。
言語的表現	・論理の整理、伝達 ・意味の明確化	半具体物を用いて、自分の言葉で説明していった。また、式についても自分の言葉で説明した。	数直線図をもとに立式の根拠を説明していった。また、式と図を結び付けて説明した。
記号的表現	・簡潔、明確、厳密 ・抽象化、一般化 ・形式的処理	14 ÷ 3 = 4あまり2 15 ÷ 4 = 3あまり3 など	2 / 5 ÷ 3 / 4 = 8 / 15 7 / 12 (時間) = 35 (分) など

図4 実際の授業における5つの表現様式

検証授業では、上記の5つの表現様式を用いる場面を常に意識し、より効果的な表現ができるよう授業を構成していった。そのことにより、授業者がどの表現様式を用いて表すのか、説明するのかを明確にすることができた。

イ 表現様式の変換について

(7) 異なる表現様式間における変換について

検証授業では、図をかいた児童に説明させるのではなく、別の児童に説明させたり、式だけを黒板に書かせて、どうしてそのような式になったのかをみんなで一緒に考えさせたりする活動を行った。表現様式を変換する活動を継続していくことが、数学的な表現力の育成につながると考える。また、特定の児童が解決方法を発表して、他の児童は聞き役という、いわゆる発表形式の練り上げ場面ではなく、友達の表現から、その考えを読み取るという授業は、一人ひとりの活動頻度が高まっていく。表現力を育成するためには、表現する場面を多く取り入れなければならない。そのような意味からも、異なる表現様式間において変換する活動は、数学的な表現力を育成するうえで有効であった。

(イ) 同じ表現様式内における変換について

3年生の授業において、同じ表現様式内（言語的表現から言語的表現へ）で変換を行う活動で、次のような場面があった。

A児：「4の段に答えがあるから割り切れます。」
B児：「4の段に20があるから割り切れます。」
C児：「41（しいち）が4、42（しに）が8、43（しさん）12、44（しし）16、45（しご）20で、20があるから割り切れます。」

この3人の児童は、同じことを表現しているが、それぞれ表現の仕方が異なっている。言語的表現を変換する活動を通して、表現の仕方が変わってきた。そして、表現を換えていくことにより、より詳しい説明になってきた。この違いを明確化し、評価していく活動を行うことが、数学的な表現力の育成につながると考える。また、同じ内容を言葉を換えて繰り返し説明していくため、低学年の児童や特別な支援を必要とする児童には、理解を深めていくうえでも有効であるといえる。授業の中で、このような活動を行っていくことが、すべての児童にとって分かりやすい授業となるのではないだろうか。

ウ 授業構成について

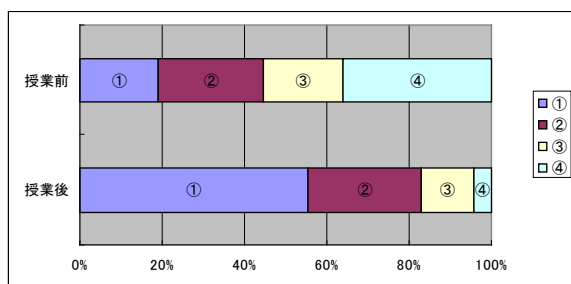
(7) 数学的な表現を用いて表す算数的活動について

本検証授業では、毎時間、問題を解決したり、友達に説明したりするために表す算数的活動を位置付け、ノートに表現する場面を設定した。3年生では、絵や図を使って問題場面を把握し、6年生では2本の数直線図を使い問題場面を把握していった。授業では、ほとんどの児童が何らかの数学的表現を用いて問題を把握することができた。その結果、検証授業前と検証授業後では、「算数の問題を解くときに、絵や図をかいて問題を解いていますか。」という設問に対する回答における肯定的評価の割合が高くなった。授業では、表す算数的活動を意識して位置付け、それを継続していくことで、数学的な表現力を育てることができると考える。

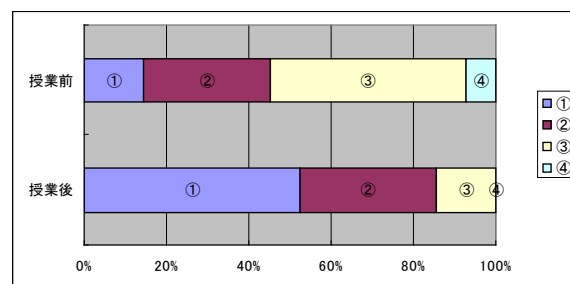
◇ アンケートの結果（検証授業前と授業後）

設問：「算数の問題を解くときに、絵や図をかいて問題を解いていますか。」

①はい ②どちらかといえば、はい ③どちらかといえば、いいえ ④いいえ



グラフ1 3年生のアンケート結果



グラフ2 6年生のアンケート結果

「はい」「どちらかといえば、はい」の児童が、3年生（グラフ1）は45%から83%、6年生（グラフ2）が45%から86%に増えている。また、「いいえ」と答えた児童は、3年生は36%から4%、6年生は7%から0%と大きく減った。

(イ) 数学的な表現を用いて説明する算数的活動について

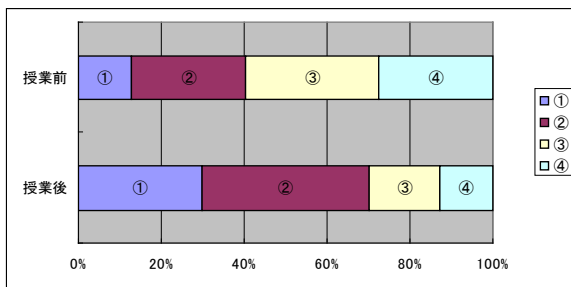
検証授業では、表す算数的活動と同様、説明する算数的活動も授業の中に位置付け、説明する場面を設定した。具体物や図、数直線等を用いて説明することで、表現力を育てると同時に理解を深めることができた。

児童の学習感想の中に、「どうやって解いたらいいのかわからなかったけど、数直線にあらわしたら分かりやすかったです。特に、AくんやBさんの説明がすごく分かりやすかったです。」「今日は、整数のわり算・小数のわり算・分数のわり算を数直線図を使ってやりました。今回はこれまでならなかったことをいかしてできたし、今日の発表では、Aちゃんが書きながら説明していたし、分かりやすく発表してくれたのでよかったです。」という記述があった。この記述からも、図や数直線などの図的表現を用いることは、表現力を育てることにもつながるが、説明を聞いている児童の理解を深めるためにも有効であったと考えられる。

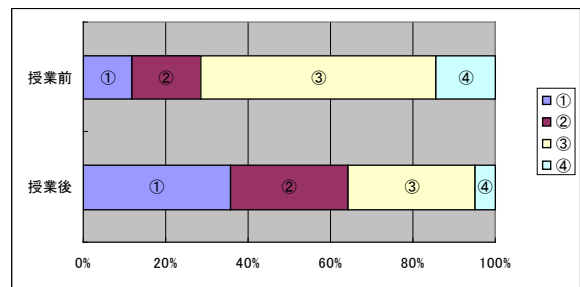
◇ アンケートの結果（検証授業前と授業後）

設問：「友達に問題の解き方や考え方を説明するときに、絵や図を使っていますか。」

①はい ②どちらかといえば、はい ③どちらかといえば、いいえ ④いいえ



グラフ3 3年生のアンケート結果



グラフ4 6年生のアンケート結果

「はい」「どちらかといえば、はい」の児童が、3年生（グラフ3）は41%から70%、6年生（グラフ4）が29%から64%に増えている。また、「いいえ」と答えた児童は、3年生が28%から13%、6年生が14%から5%と減少した。

(ウ) 単元後の振り返り（研究レポート）について

3年生（図5）、6年生（図6）ともに、ほとんどの児童が図的表現、言語的表現、記号的表現を使い研究レポートをかくことができていた。単元の終末にこのような活動を取り入れ、継続していくことで数学的な表現力が高まると考える。また、研究レポートによって形成的評価を行うことができるため、理解が十分ではない児童を把握することができた。

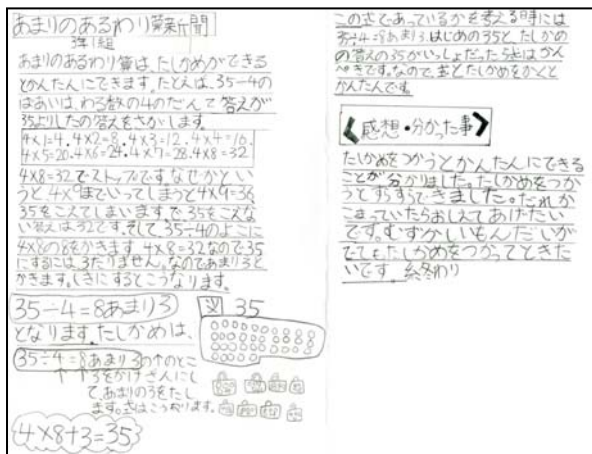


図5 3年生の研究レポート

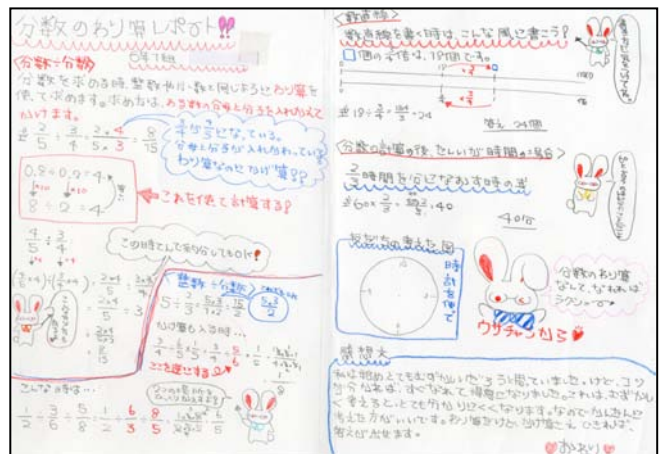


図6 6年生の研究レポート

5 研究の成果と課題

(1) 成果

ア 数学的な表現様式について

5つの表現様式とそのはらたきについては、第3学年・第6学年で使われる表現様式について、発達段階や学習内容をもとに具体的に分類し、表現様式を用いる場面を常に意識し、指導することができた。その結果として、児童は様々な表現様式を用いることができるようになった。授業中の児童の様子、アンケート結果、算数日記や研究レポートからも分かるように、異なる表現様式間における変換、同じ表現様式内における変換を行う活動は、数学的な表現力の育成につながる有効な活動であった。

イ 授業構成について

数学的な表現力を育てる授業構成(図3)にすることで、表す・説明する算数的活動、表現様式の変換を行う場面を意識して授業を行うことができた。特に、練り上げ場面で表現様式の変換を行う活動を取り入れることで、児童同士にかかわりを生むことができ、そのことが数学的な表現力の育成につながった。また、友達の表現を考えたり、友達の気持ちを考えたりするという表現様式を変換する場面があるということで、児童は目的意識をもって主体的に話したり、聞いたりすることができるようになった。

ウ 数学的な表現力を育てる指導法について

数学的な表現力を育てるための指導法については、指導技術・ノート作り・板書の3点について成果があった。指導技術については、「友達の発表を復唱させる」「再現する場を設定する」「教師がわざと聞き間違ふ」「～さんの気持ち分かるかな?と問う」「聞き手を意識して話をさせる」の5つの活動を意識して行った。授業中の児童の姿や学習感想等から、数学的な表現力の育成という観点では、この5つの活動が有効であったと考える。ノート作りでは、児童のノートや研究レポートに多くの表現様式を用いた表現が見られたこと、また児童の学習感想の文字数、記述内容の変容から、数学的な表現力の育成ができたといえる。板書については、数学的な表現力の育成の基盤となる関心・意欲を高めるための板書にすることを心がけた。具体的には、児童の名前や考えた方法などを板書していくことで関心・意欲を高めることができた。そして、その高まりが児童自らの表現したいという気持ちにつながった。

(2) 課題

ア 表現様式の変換場面での書く活動の保障について

検証授業では、表現様式の変換を行う場面で書く活動を多く取り入れることができなかった。表す場面、算数日記を書く場面、研究レポートを書く場面では書く活動を十分取り入れたが、表現様式の変換を行う場面での書く活動が不十分であった。今後は、言語活動の充実という点からも、表現様式の変換場面で、話をさせるだけでなくノートに書くなどの書く活動を積極的に取り入れる必要がある。

イ 図的表現の系統的な指導について

表す・説明する算数的活動、表現様式の変換を取り入れた授業を行ううえで、「テープ図、線分図、数直線をどの学年で指導するか」等、どの学年で、どの図的表現を用いて表現するのかという系統性について検討することは、大切なことである。今後は、図的表現などの表現様式の系統性について、整理する必要がある。

6 おわりに

私の研究の柱は、表す・説明する算数的活動、そして表現様式の変換であった。様々な表現様式を用いて表し説明する算数的活動は、思考力・判断力・表現力を育成するための活動として新学習指導要領において重視されているものである。これまでも、算数の授業では、様々な表現をさせてきたが、これからは様々な表現様式を用いて表す・説明する算数的活動と表現様式の変換とを意識する授業、つまり理論と実践を結び付けた授業を構成していくことが一層重要になってくると考える。全国学力・学習状況調査のB問題の多くは、式や答えからその考えを説明する問題（記号的表現から図的表現への変換、記号的表現から言語的表現への変換）であった。表現様式の変換を行う授業を通して、これからも高知県の課題である数学的な表現力を育てる授業を行っていききたい。と同時に、数学的な表現様式の変換をする活動を通して、形式的な理解だけでなく、計算の仕方について説明することができる関係的な理解を深めさせていきたい。

「はじめは、わり算の式が分かりませんでした。なぜ、分からなかったかということ、その答えの14の数が3のだんのかけ算になかったからです。それで、書く時間が終わって、発表の時間になって、A君が、『あまりの数がありません。』と言ったので、あっそうか、と思いました。」「今日の勉強では、B君がかけ算でやって 6×3 をして、それにC君が5をたして23と言っていました。二人のおかげで式をたしかめることができました。」「今日は、2本の数直線が何だか、ぜんぜん分からなくてなやんでいたけど、Dさんがかいた数直線を使って、EさんとF君が分かりやすく説明してくれたので、分かりやすかったです。」これは、児童が授業後に書いた算数日記の一部である。どの記述も、表現様式を変換した友達の説明で理解することができたというものである。

私が授業で一番意識していたことは、表現様式の変換を行う活動を通して、児童同士のかかわりのある授業にしよう、ということであった。「みんなが分かっていないのに分かった瞬間」、「友達の考えが分かった瞬間」、「友達が自分の考えを分かってくれた瞬間」、「自分では考えられなかった友達の考えに出合う瞬間」は、児童にとってとても楽しい時間である。友達とかかわる授業で、このような瞬間をたくさん児童に経験させていきたい、そして算数好きの児童を一人でも多く育てたい、と考え日々の検証授業を行ってきた。好きになるということが算数科の学力向上の第一歩であることは間違いない。特に、高知県の課題でもある中学校の数学の課題は、この好きになるということで解決できる部分もあると考えている。友達とかかわり合う授業を通して、これからも、算数の授業が好きという児童を一人でも多く育てていきたい。

※掲載物使用承諾済

【引用文献】

- (1) 中原忠男『教育時評 No. 17』p. 11 学校教育研究所、2009
- (2) 平林一栄『現代教科数学体系4 数学と思考』p. 208 第一法規出版、1974
- (3) 坪田耕三『教育研究 Vol. 62 No. 12』p. 26 不昧堂出版、2008

【参考文献】

- ・ 中原忠男『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社、1995
- ・ 全国算数授業研究会『算数教育を考える21の提言』東洋館、1998
- ・ 東京都立教育研究所「数学的に表現したり処理したりする能力を高める指導に関する研究」、1998
- ・ 田中博史『算数的表現力を育てる算数授業』東洋館、2001
- ・ 山本良和『学習意欲がぐんぐんわく算数的問題提示10のポイント』学事出版、2004
- ・ 秋田喜代美『はじめての質的研究法 教育・学習編』東京図書、2007
- ・ 中村享史『数学的な思考力・表現力を伸ばす算数授業』明治図書、2008
- ・ 尾崎正彦『“考える算数”のノート指導』明治図書、2008
- ・ 岡山県教育センター「算数の楽しさをすべての子どもに伝えたい！魅力ある授業づくりⅡ」、2009
- ・ 小松信哉『算数の本質を貫く話し合い活動を創るポイント』明治図書、2009