

問題 1

$$(1) \quad \left(\begin{array}{l} 15 = 7 + 8 \\ 15 = 4 + 5 + 6 \\ 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 45 = 22 + 23 \\ 45 = 14 + 15 + 16 \\ 45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ 45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ 45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \end{array} \right.$$

15は、

$$15 = 7 + 8$$

$$15 = 5 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

45は、

$$45 = 22 + 23$$

$$45 = 15 \times 3$$

$$45 = 9 \times 5$$

$$45 = 5 \times 9$$

$$45 = 3 \times 15$$

奇数は必ず、2つの連続する自然数の和で表される。

また、奇数の約数に注目して考える。

【例】 $45 = 15 \times 3$ だと、

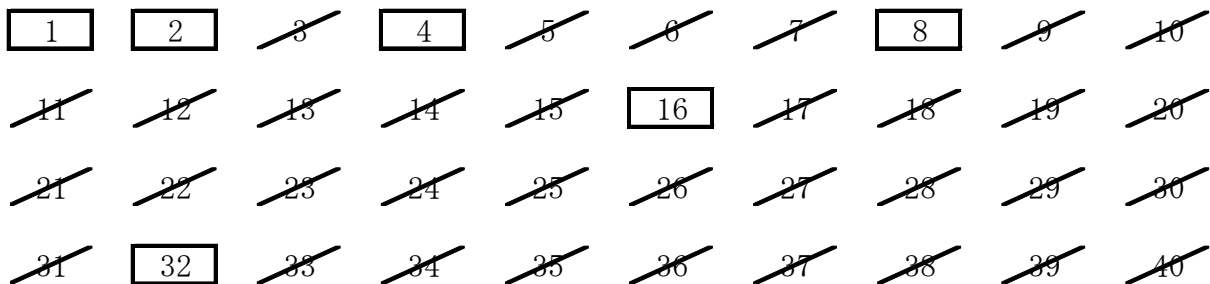
$$= 15 + 15 + 15$$

$$= (15 - 1) + 15 + (15 + 1)$$

$$= 14 + 15 + 16$$

と表すことができる。

(2)



奇数は連続する2つの自然数の和で表すことができる。

偶数の中で奇数を約数に持つものは、連続する全数の和で表すことができる。

(自然数を奇数個の自然数の和で表すことができる)

【例】 $24 = 8 \times 3$

$$= 8 + 8 + 8$$

$$= (8 - 1) + 8 + (8 + 1)$$

$$= 7 + 8 + 9$$

よって、

1、2、4、8、16、32 の6つが連続するいくつかの自然数の和で表すことができない。

これらの数は、 2^n ($n=0, 1, 2, 3, 4, 5$) の形になっている。

(3) 1から20までの自然数をいくつかの連続する自然数の和で表す。

$$\begin{array}{l}
 1 = \times \\
 2 = \times \\
 3 = 1 + 2 \\
 4 = \times \\
 5 = 2 + 3 \\
 6 = 1 + 2 + 3 \\
 7 = 3 + 4 \\
 8 = \times \\
 \end{array}
 \quad
 \left(
 \begin{array}{l}
 9 = 2 + 3 + 4 \\
 9 = 4 + 5 \\
 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\
 11 = 5 + 6 \\
 12 = 3 + 4 + 5 \\
 13 = 6 + 7 \\
 14 = 2 + 3 + 4 + 5 \\
 \end{array}
 \right)
 \quad
 \left(
 \begin{array}{l}
 15 = 4 + 5 + 6 \\
 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
 15 = 7 + 8 \\
 16 = \times \\
 17 = 8 + 9 \\
 18 = 5 + 6 + 7 \\
 18 = 3 + 4 + 5 + 6 \\
 19 = 9 + 10 \\
 20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
 \end{array}
 \right)$$

この中で、連続するいくつかの自然数の和で表すことができる数に着目してみる。

まず18に注目してみる。

18の1以外の約数をみると、2、3、6、9、18の5つ。

そのうち奇数の約数は3、9の2つ。

$$18 = 6 \times 3$$

$$= 6 + 6 + 6$$

$$= (6-1) + 6 + (6+1)$$

$$= 5 + 6 + 7$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= (2-4) + (2-3) + (2-2) + (2-1) + 2 + (2+1) + (2+2) + (2+3) + (2+4)$$

$$= (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$= 3 + 4 + 5 + 6$$

真ん中の数を中心に前後に1から順に同じ数をたしたりひいたりする。

0になる

と表すことができる。このように偶数を連続するいくつかの自然数の和で表す方法は、1以外の奇数の約数の個数と同じ数だけある。

次に15に注目してみる。

15の1とその数以外の奇数の約数をみると、3、5の2つ。

$$15 = 5 \times 3$$

$$= 5 + 5 + 5$$

$$= (5-1) + 5 + (5+1)$$

$$= 4 + 5 + 6$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$= (5-2) + (5-1) + 5 + (5+1) + (5+2)$$

$$= 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

つまり、自然数が奇数の場合、1とその数以外の奇数の約数の個数の分だけ連続するいくつかの自然数の和で表せる。

また、nを自然数とすると奇数は $2n+1$ で表すことができる。

$$2n+1 = n + (n+1)$$

n、n+1は連続する自然数であるから、自然数が奇数の場合、必ず2つの連続する自然数の和で表すことができる。

よって、自然数を連続する自然数の和の形に表す表し方は、

自然数が偶数の場合、1以外の奇数の約数の個数だけ、連続するいくつかの自然数の和で表せる。

自然数が奇数の場合、必ず連続した2つの自然数の和で表せ、1とその数以外の奇数の約数の個数だけ、連続するいくつかの自然数の和で表せる。

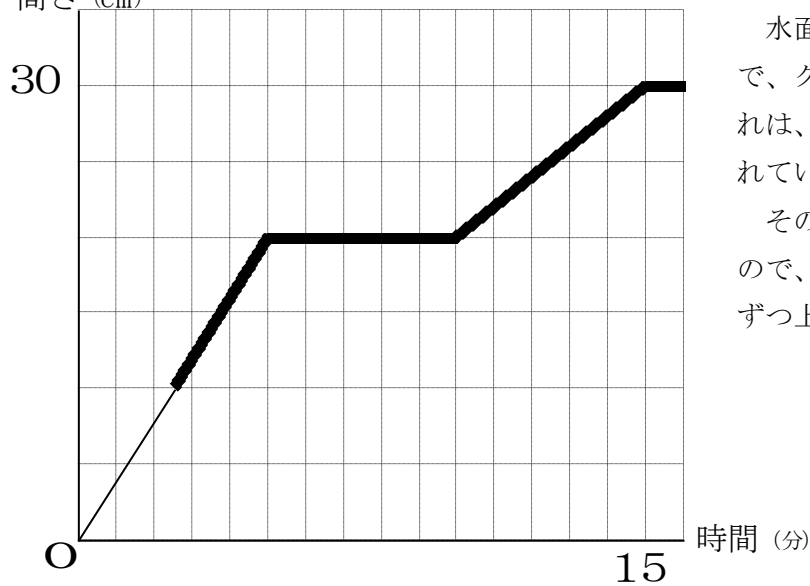
問題 2

(1)

- 水面の高さは最高で 30 cm。
- 水面の高さは 1 時間に 2 cm ずつ上昇する。
- 15 時間で水は一杯になる。(それからは溢れる。)
- 直線で比例のグラフなので、おもりや仕切り板などが無い。
- 水槽の容積は $25 \times 40 \times 30$ で 30000 cm^3 。
- 1 時間あたり $30000 \div 15$ で 2000 cm^3 の水が水槽の中に入る。

(2)

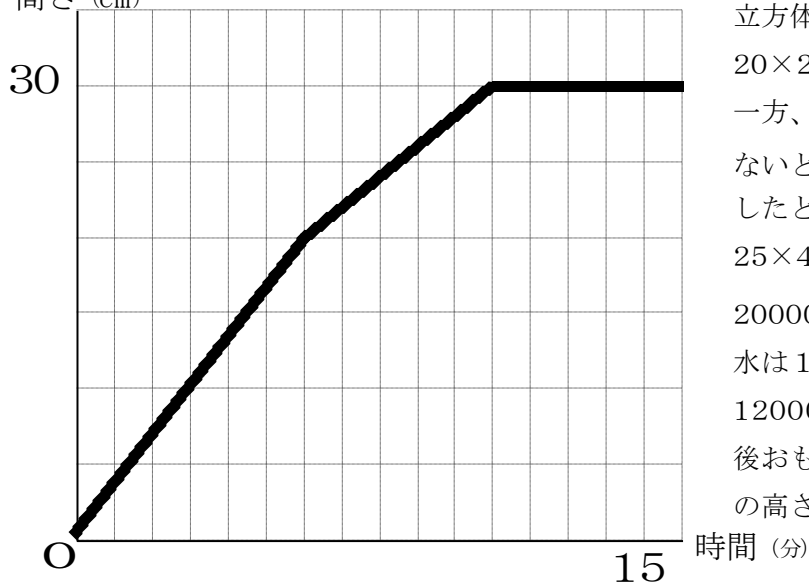
① 水面の高さ (cm)



水面の高さが 20 cm のところで、グラフは一旦平行になる。これは、水が仕切り板を越えてあふれているということになる。

その後おもりや仕切り板はないので、水面の高さは 1 時間に 2 cm ずつ上昇する。

② 水面の高さ (cm)



立方体の体積は

$20 \times 20 \times 20$ で 8000 cm^3 。

一方、水そうにおもりなどを入っていないときに 20 cm の高さまで水嵩が増したときの水の容積は

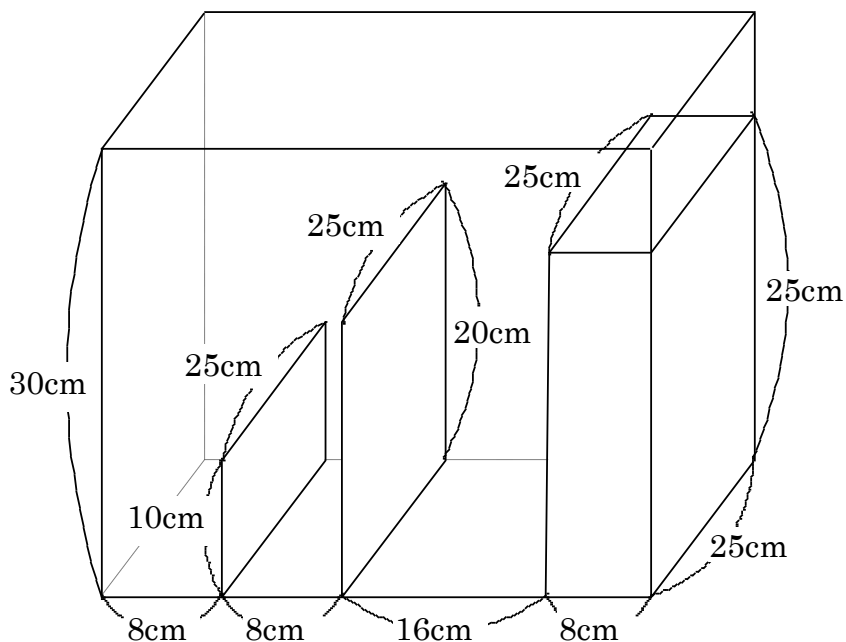
$25 \times 40 \times 20$ で 20000 cm^3 。

$20000 - 8000 = 12000 \text{ (cm}^3)$

水は 1 時間に 2000 cm^3 入るので、

$12000 \div 2000$ で 6 時間かかる。その後おもりや仕切り板はないので、水面の高さは 1 時間に 2 cm ずつ上昇する。

(3)



- ・グラフが横軸に平行なときは水が仕切り板を越えて溢れているとき。
- ・水面の高さが1時間に2cmずつ上昇しているとき、仕切り板などは何もない。

上記を踏まえ、グラフを7つに分けて考えていくこととする。

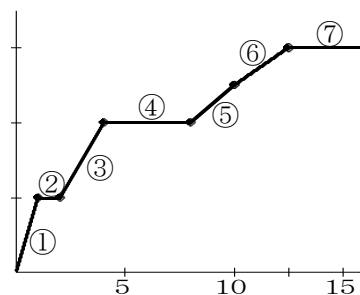
グラフ : (1) のグラフ

① 10cm/分 : 2cm/分

5 : 1

5倍早く溜まっているので、 $40 \div \frac{5}{1} = 8$ 横幅8cm。

高さは10cm。



② 1時間グラフは横軸に平行なので、同じ時間で高さ10cmの仕切り板の右と左で同じ量の水が入ったことになる。

③ 5cm/分 : 2cm/分

5 : 2

$\frac{5}{2}$ 倍早く溜まっているので $40 \div \frac{5}{2} = 16$ 横幅は16cm、高さは20cm。

④ 4時間グラフは横軸に平行なので、同じ時間で高さ20cmの仕切り板の右と左で同じ量の水が入ったことになる。

⑤ 2.5cm/分 : 2cm/分

5 : 4

$\frac{4}{5}$ 倍早く溜まっているので $40 \div \frac{4}{5} = 32$ 横幅は32cm。

⑥ 水面の高さが1時間に2cmずつ上昇しているので、仕切り板などは何もないことが分かる。
12.5時間で一杯になるので、25時間でたまる水の容積分のおもり ($8 \times 25 \times 25$)
があることが分かる。

以上のように順番に考えていくと、解きやすいのではないかと考えた。

問題 3

(1) 「3」と「9」という、2つの数字をみて気がついたこと

- ・ 9は3の倍数である。(3から9までは3倍である)
- ・ どちらも奇数である。
- ・ どちらもきりが良く残っている。

上の3つを参考にして、3の倍数である6と、3の3乗である27の2つで調べてみる。

6では、

1、2、3、4、5、6、3、6 となり、6は消えてしまう上に最後に1枚のカードは残らない。

27では、

1、2、3、4、5・・・26、27、3、6、9・・・27、9、18、27

1の倍数 3の倍数 9の倍数

と、最後に27が残る。

つまり、最初に 3^n (n =自然数)枚を用意すれば、最後に一番大きなカードが1枚だけ残るといえる。

(2)

(1) では1周目 (1から27まですべてのカードがあるとき) 1の倍数で並んでいた。

2周目 (27のカードを下にして、3のカードが上にきたとき) 3の倍数で並んでいた。

3周目 (27のカードを下にして、9のカードが上にきたとき) 9の倍数で並んでいた。

ということが分かった。

これをもとにしてこの問題も考えてみると、

1周目 (1から x まですべてのカードがあるとき) 1の倍数で並ぶ

2周目 (x のカードを下にして、4のカードが上にきたとき) 4の倍数で並ぶ

3周目 (x のカードを下にして、16のカードが上にきたとき) 16の倍数で並ぶ

m 周目 (x のカードを下にして、 $4^{(m-1)}$ のカードが上にきたとき) $4^{(m-1)}$ の倍数で並ぶ

1回の作業で3枚のカードを捨てるので、残るカードはすべて4の倍数である。

例えば16枚のとき、

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16

↓ ↓ ↓ ↓

4 8 12 16 最後に残ったカードは16。

つまり、最初に 4^n (n ・・・1、2、3・・・)枚を用意すれば、最後に一番大きな数のカードが残るといえる。

(3)

(1) (2) の結果から、 $n = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のとき、
 $\{(\text{1回の作業で捨てるカードの枚数}) + 1\}^n = (\text{最後に1枚だけ残るカード}) = (\text{用意する枚数})$
 x とする といふことが言える。

今回求めたいのは1回の作業で捨てるカードの枚数なので、分からない n を求める必要がある。

256 を累乗の形にすると、 256^1 、 16^2 、 4^4 、 2^8 の4つになる。

それぞれ累乗の指数は1、2、4、8となるので、 n には1、2、4、8がそれぞれあてはまる。

$n=1$ のとき

$$(x+1)^1 = 256^1$$

このとき、 $(x+1)^1 = 256^1$ と等しいので、

$$x+1 = 256$$

$$x = 256 - 1$$

$$\underline{x=255} \text{ となる。}$$

$n=2$ のとき

$$(x+1)^2 = 256$$

このとき、 $(x+1)^2$ は 16^2 と等しいので、

$$x+1 = 16$$

$$x = 16 - 1$$

$$\underline{x=15} \text{ となる。}$$

$n=4$ のとき

$$(x+1)^4 = 256$$

このとき、 $(x+1)^4$ は 4^4 と等しいので、

$$x+1 = 4$$

$$x = 4 - 1$$

$$\underline{x=3} \text{ となる。}$$

$n=8$ のとき

$$(x+1)^8 = 256$$

このとき、 $(x+1)^8$ は 2^8 と等しいので、

$$x+1 = 2$$

$$x = 2 - 1$$

$$\underline{x=1} \text{ となる。}$$

よって、用意するカードが256枚のとき、最後に256のカードが残るようにするには、1回の作業で捨てるカードの枚数を1枚、3枚、15枚、255枚のいずれかにする必要がある。