問題１

（１）まずは実際に試してみる。

カードの順番	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B
箱の順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										（１周目）										（２周目）

C	A	B	C
1	2	3	4

…（３周目）　　よって、実際に試した結果、C であることが分かる。

このことを計算によって求める方法を考える。
まず、3周目に4番の箱に入れるカードは、最初から24番目の箱に入るカードであるといえる。
また、A、B、Cのそれぞれのカードを何番目の箱に入れるのかを自然数nを使って考えると、

Aは　１、４、７…番目の箱に入れる。　→（３n－２）
Bは　２、５、８…番目の箱に入れる。　→（３n－１）
Cは　３、６、９…番目の箱に入れる。　→　３n
番目の箱に入れることが分かる。（nは自然数）

この３つの式の値が２４のときのnの値を求めると、nが自然数となるのは３nのときだけである。
よって、計算からも３周目の４番目に入れるカードがCであることが分かる。

C

（２）（１）の考え方と同様にすると、
２６周目が終わったとき、４番の箱に入っている（入れる）カード
↓
260番目のカードを入れ終わったとき、(10x－6)番目に入れたカードと表すことができる。(xは自然数)
※4、14、24…番目に4の箱にカードを入れることから

また、カードは全ての箱に26枚ずつ入っているので、4番の箱にもカードが26枚入っていることになる。

試しに、4、14、24、34…番目に入るカードの種類を見るために、それぞれのカードの中で4番の箱に入るカードを、下の表のようにして調べると、(yを自然数とする)

Aは、１、　７、１３、１９、２５、３１、３７、４３、４９・・・、６y－５
Bは、２、　８、１４、２０、２６、３２、３８、４４、５０・・・、６y－４
Cは、３、　９、１５、２１、２７、３３、３９、４５、５１・・・、６y－３
Dは、４、１０、１６、２２、２８、３４、４０、４６、５２・・・、６y－２
Eは、５、１１、１７、２３、２９、３５、４１、４７、５３・・・、６y－１
Fは、６、１２、１８、２４、３０、３６、４２、４８、５４・・・、６y

と、D→B→F→D→B→F…と繰り返して入ることが分かった。

丸をつけた数の規則性からmを自然数nとして、D、E、Fのうち４番の箱に入るカードの順番を表すと、Dは（３０n－２６）番目、Bは（３０n－１６）番目、Fは（３０n－６）番目のカードとなることが分かる。
内訳は、Dは、30n－26≦260より、n≦9．53…であるから、nの最大値は9。よってDは9枚
　　Bは、30n－16≦260より、n≦9．2であるから、nの最大値は9。よってBは9枚
　　Fは、30n－6≦260より、n≦8．86…であるから、nの最大値は8。よってFは8枚

したがって、４番の箱にはDが９枚、Bが９枚、Fが８枚入っている。

（３）「すべての箱に６種類のカードが入るようにする」ということを、図で端的に表すと、

	箱	1	2	3	4	5	…
箱に入っているカード		A	A	A	A	A	
		B	B	B	B	B	
		C	C	C	C	C	
		D	D	D	D	D	
		E	E	E	E	E	
		F	F	F	F	F	
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

というふうに、全ての箱にＡ～Ｆまでの全てのカードが入っていることになる。

しかし、2つ以上箱を用意した場合、始めに入れるカードは、1番の箱にはA、2番の箱にはBとなるので、全ての箱に同じ順番で入るとは限らない。

そこで、1番の箱に入れるカードの順番を固定し、考えてみた。A～Fまでを1まとまりとして考える。

	箱	1	2	3	4	5	6	7	…	13	…	19	…	$\boxed{6n+1}$
箱に入っているカード		A	B	C	D	E	F	A		A		A		
		B	C	D	E	F	A	B		B		B		
		C	D	E	F	A	B	C		C		C		
		D	E	F	A	B	C	D		D		D		
		E	F	A	B	C	D	E		E		E		
		F	A	B	C	D	E	F		F		F		

上の表のように、１番の箱にA、B、C、D、E、Fの順番でカードが入るようにすれば、全ての箱にA、B、C、D、E、Fのカードが入る。このとき箱の数は７、１３、１９、…であるから、箱を６ｎ＋１用意すればよい。（ｎ＝０のとき、箱は１つとなり、全てのカードが入ることになる。）

この方法は、箱の数が６ｎより１大きい数のとき、２周目に入るときにカードの順番が１つずれることから、全ての種類のカードが全ての箱に入ることになる。

同じように、箱の数が６ｎより１小さい数のとき、２周目に入るときにカードの順番が１つずれることから、全ての種類のカードが全ての箱に入ることになる。

	箱	1	2	3	4	5	…	11	…	17	…	$\boxed{6n-1}$
箱に入っているカード		A	B	C	D	E		A		A		
		F	A	B	C	D		F		F		
		E	F	A	B	C		E		E		
		D	E	F	A	B		D		D		
		C	D	E	F	A		C		C		
		B	C	D	E	F		B		B		

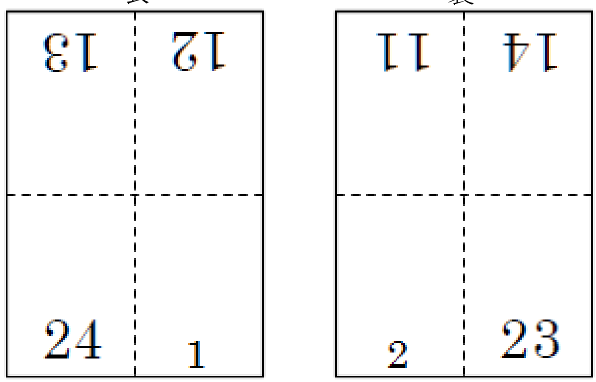
上の表のように、１番の箱にA、F、E、D、C、Bの順番でカードが入るようにすれば、全ての箱にA、B、C、D、E、Fのカードが入る。このとき箱の数は５、１１、１７、…であるから、箱を６ｎ－１用意すればよい。（ただし、ｎ＝０のときは箱の数がマイナスになるため、ｎは自然数である）

よって、箱の数を１にする、または、６ｎ±１にすればよい。（ｎは自然数）

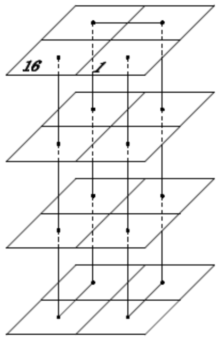
問題２

（１）

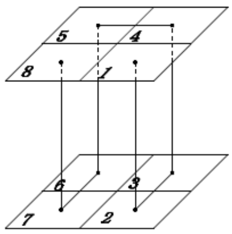
表　　　　　　　　　　裏



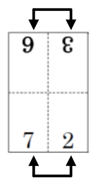
次に、2枚の場合を同様に考えてページ番号の順番を線で結ぶと、右の図のようになり、1枚の場合と比較すると縦に線が延びた図になる。



まず、1枚の紙で考えてみる。
実際は、1枚の紙の表裏を考えるが、これを片面に分解し、表面1枚、裏面1枚として立体の形に並べて、ページ番号の順番を線で結ぶと、下のようになる。



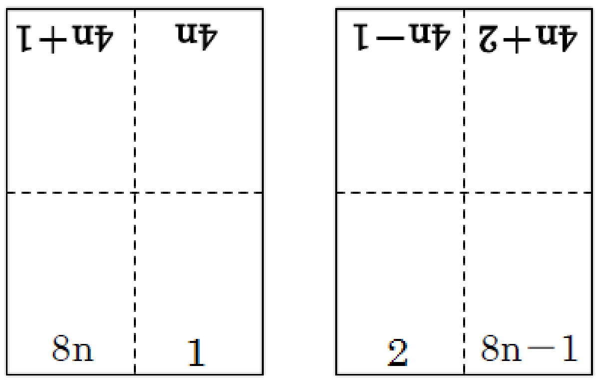
2枚目は裏面に当たるため、実際のページ番号は左右逆になる。



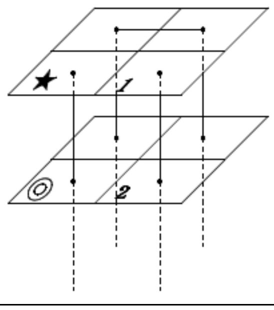
そこで、3枚の場合を同様に考え、
・1の左は最後のページ番号
・1の上は総ページ数の半分のページ番号
・1の左上は1の上の次のページ番号
・1と左上のページ番号の裏は次のページ番号
・1の上と左のページ番号の裏は前のページ番号
と予想した。
実際につくってみると、この予想と一致した。

（２）

表　　　　　　　　　　裏

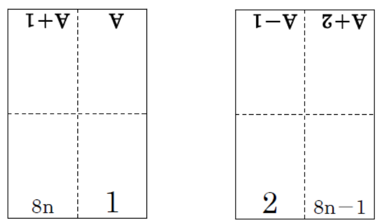


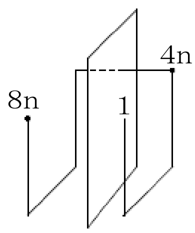
(1)と同じように考える。
下の図の★は最後のページ番号となる。紙が1枚ならば、最後のページは8となり、紙が1枚増えるごとにページ数は8ずつ増えるから、★は8nとなる。



また、◎は8nの裏に当たるため、8nの前のページ番号となる。よって◎は8n－1となる。

次に、1の上のページ番号をAとして、上段のページ番号を表すと、表の左はA＋1（Aの次のページ番号）、裏の左はA－1（Aの前のページ番号）、裏の右はA＋2（A＋1の次のページ番号）となる。





左の図のように立体の形にページ番号を並べて考えると、ページ数は、右半分と左半分でちょうど2等分になることが分かる。
よって、1の上のページ番号は、総ページ数の半分の数と同じであるから4nとなる。つまり、Aは4nとなる。

よって、Aに4nを代入すると、左上のような答えになる。

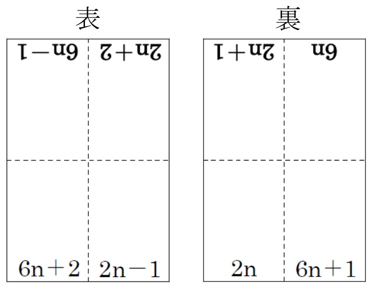
（３）

(1)と(2)から気付いたこと

① 表と裏をそれぞれ4等分するので、紙の枚数がn枚のとき、メモノートのページ数は、紙の枚数を8倍した8nページとなる。

② 1枚目の表の紙は、1の左が最後のページ番号（8n）となり、上はちょうど総ページ数の半分の数のページ番号（4n）となる。

③ n枚の紙を重ねたとき、n枚目の紙の表のページ番号は、右のようになる。



※ 紙をn枚重ねるとき、全部で8nページとなる。ページ番号は4等分されると考えると、それぞれの縦に並んだ最後のページ番号は、2n、4n、6n、8nとなる。このページ番号のうち、4nと8nは1枚目の表に表れ、4nと6nはn枚目の裏に表れる。

このことから、ページ番号を1ずつずらして、n枚目の表と裏のページ番号を、nを使って表すことができる。

④ n枚の紙を重ねたとき、(n－1)枚目〔nは2以上の自然数〕の紙の表のページ番号は、右のようになる。（上記n枚目の表のページ番号より）

⑤ ③、④の数には規則性があり、(n－2)枚目や(n－3)枚目となると、＋2や－2ずつ変化していくと考えることができる。

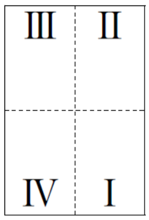
⑥ ③、④、⑤より、n枚のカードを重ねたとき、(n－m)枚目〔n＞m、nは2以上の自然数、mは自然数〕の紙の表のページ番号は、

Ⅰ…2n－1－2m

Ⅱ…2n＋2＋2m

Ⅲ…6n－1－2m

Ⅳ…6n＋2＋2m



紙の裏のページ番号は、

Ⅰの裏…Ⅰより1大きいから、2n－1－2m＋1＝2n－2m

Ⅱの裏…Ⅱより1小さいから、2n＋2＋2m－1＝2n＋2m＋1

Ⅲの裏…Ⅲより1大きいから、6n－1－2m＋1＝6n－2m

Ⅳの裏…Ⅳより1小さいから、6n＋2＋2m－1＝6n＋2m＋1

この式を使えば、(1)の問題はn＝3、m＝2を代入することで、ページ番号を求めることができる。

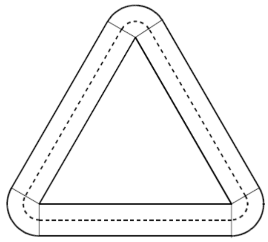
また、(2)の問題の表のページ番号は、m＝n－1を代入することで求めることができる。

問題３

（１）円の中心が通る線の長さと面積は、

長さ…右の図で、点線部分で表されているところ

面積…右の図で、三角形の外側の長方形3つの面積と扇形の3つの面積の和となる。



この1つの扇形の中心角の大きさは、360°－90°×2－60°＝120°

よって、この扇形3つで円1つ分になる。

このことから、

長さは、12cmが3つと半径2cmの円周の和となるから、$12\times3+2\times2\times\pi=36+4\pi$

面積は、長方形3つと半径4cmの円の面積の和となるから、$12\times4\times3+4^2\times\pi=144+16\pi$

① $(36+4\pi)$cm　② $(144+16\pi)\mathrm{cm}^2$

（２）

	三角形	四角形	五角形
円の中心が通ってできる線の長さ(cm)	$36+4\pi$	$36+4\pi$	$36+4\pi$
円が通った部分の面積(cm²)	$144+16\pi$	$144+16\pi$	$144+16\pi$

三角形や四角形をn角形として考え、扇形の中心角の大きさの合計を求めると、

$$360\times\underbrace{n}_{\text{頂点の数}}-\{\underbrace{90\times2\times n}_{\text{頂点に集まる直角の和}}+\underbrace{180(n-2)}_{\text{n角形の内角の和}}\}=360n-(180n+180n-360)=360$$

よって、円の中心が通ってできる線の長さを求める式は、

（図形の周りの長さ）＋（半径2cmの円の円周）であるから、$L=\ell+4\pi$となる

また、円が通った部分の面積は、

4×（図形の周りの長さ）＋（半径4cmの円の面積）であるから、$S=4\ell+16\pi$となる。

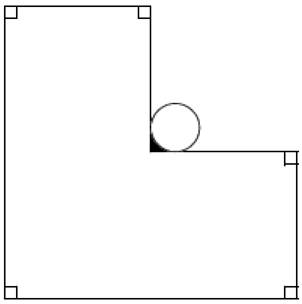
円の半径が2倍になるのは、円が通る面積を求める場合、頂点を回るとき、その頂点を中心として円の直径を半径とした軌跡を描くからである。

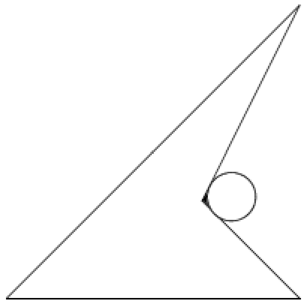
この問題の三角形、四角形、五角形では、図形の周りの長さが36cmと固定されているので、示されている3つの図形全てで円の中心が通ってできる線の長さは等しく、$(36+4\pi)$cmとなり、円が通った部分の面積も等しく$(144+16\pi)\mathrm{cm}^2$になる。

また、その関係は、$S=4\ell+16\pi=4(\ell+4\pi)$、$L=\ell+4\pi$であることから、$S=4L$となる。

関係式　$S=4L$

（３）



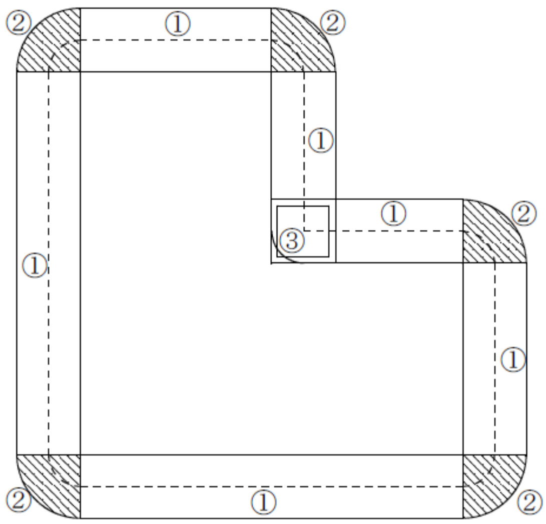


このように、凹みのある図形では、黒く塗った所のような隙間ができる。

このような図形の周りを転がる円の中心が通ってできる円の長さと、円が通った部分の面積について、どのような関係があるのか、上の左のように頂点が90°で分かりやすい図形を、

①長方形の部分、②扇形になる部分、③凹みを通る部分

に分けて考えてみる。また、円周率をπ、円の直径をR、半径をrとする。(R＝2r)



①の部分

周りの長さ…その部分での辺の長さに等しい。

面積…(その部分での辺の長さ)×(円の直径)

②の部分

周りの長さ…円の半径がつくる円周の $\frac{1}{4}$ になっている

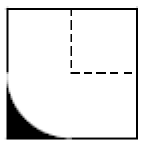
式　$\frac{\pi R}{4}$

面積…円の直径を半径とする円の面積の $\frac{1}{4}$ になっている。

式　$\frac{\pi R^2}{4}$

※(周りの長さ)×(円の直径)になっている。

③の部分



周りの長さ…半径rの2つ分であるから、2r＝R

周りの長さはその部分での辺の長さに等しい。

面積…(周りの長さ)×(円の直径)から円が通れない部分(黒く塗った部分)をひく。

これらのことをまとめると、

①の周りの長さと面積の関係は、(周りの長さ)×(円の直径)

②の周りの長さと面積の関係は、(周りの長さ)×(円の直径)

③の周りの長さと面積の関係は、(周りの長さ)×(円の直径)－(黒く塗った部分)

つまり、このような問題において、円の中心が通ってできる線の長さと、円が通った部分の面積についての正しい式は、

S＝(周りの長さ)×(直径)－(円が通れない部分の面積)　として求めることができるから、この図形では(2)の関係式が成り立たない。